(3,5) **Questão 1.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f;

b) Determine, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo de f no conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3 \ \text{ e } \ x \le y \le 3\}.$$

a) $\nabla f(x,y) = \vec{0} \iff (3x^2 - 3, 3y^2 - 12) = (0,0) \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Os pontos críticos de f são $(1,2)$ $(-1,-2)$, $(1,-2)$ e $(-1,2)$.

Classificação: $H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$

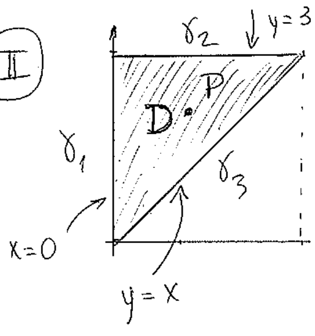
- $H(1,2) = 72 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6 > 0 \Rightarrow (1,2)$ é pt de mínimo local
- $H(-1,-2) = 72 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2) = -6 < 0 \Rightarrow (-1,-2)$ é pt de máximo local
- $H(1,-2) = H(-1,2) = -72 < 0 \Rightarrow (1,-2)$ e $(-1,2)$ são pontos de sela.

b) D é um conjunto fechado e limitado, portanto compacto, e f é função contínua. Pelo teorema de Weierstrass, f assume em D valor máximo e mínimo.

Candidatos a pontos de máximo ou mínimo de f em D $\begin{cases} \text{(I) No interior} \\ \text{(II) Na fronteira} \end{cases}$

(I) O candidato no interior de D é o ponto crítico $P = (1,2)$.

(II)



A fronteira de D é a reunião de três segmentos parametrizados por γ_1 γ_2 e γ_3

(1) $\gamma_1(t) = (0,t)$, $t \in [0,3] = I$

$f(\gamma_1(t)) = f(0,t) = t^3 - 12t$, $t \in I$

$(f \circ \gamma_1)'(t) = 3t^2 - 12 = 0 \Longrightarrow t = 2$.

Candidatos em $\operatorname{Im} \gamma_1$ (extremos do intervalo + pts c/ deriv. nula) $\begin{cases} t = 0 : Q_1 = (0,0) \\ t = 2 : Q_2 = (0,2) \\ t = 3 : Q_3 = (0,3). \end{cases}$

② $\gamma_2(t) = (t, 3)$, $t \in I$

$f \circ \gamma_2(t) = f(t,3) = t^3 - 3t + 3^3 - 12 \cdot 3 = t^3 - 3t - 9$

$(f \circ \gamma_2)'(t) = 3t^2 - t = 0 \underset{t \in I}{\Longrightarrow} t = 1$

Candidatos em $\operatorname{Im} \gamma_2$: $\begin{cases} t = 0 : & Q_3 = (0,3) \\ t = 1 : & Q_4 = (1,3) \\ t = 3 : & Q_5 = (3,3). \end{cases}$

③ $\gamma_3(t) = (t,t)$, $t \in I$

$f \circ \gamma_3(t) = 2t^3 - 15t$

$(f \circ \gamma_3)'(t) = 6t^2 - 15 = 0 \overset{t \in I}{\Longrightarrow} t = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Candidatos em $\operatorname{Im} \gamma_3$: $\begin{cases} t = 0 & Q_1 = (0,0) \\ t = \sqrt{\frac{5}{2}} & Q_6 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right). \\ t = 3 & Q_5 = (3,3) \end{cases}$

• Comparação de valores de f nos candidatos

- $f(P) = f(1,2) = 1^3 + 2^3 - 3.1 - 12 \cdot 2 = -18$
- $f(Q_1) = f(0,0) = 0$
- $f(Q_2) = f(0,2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$
- $f(Q_3) = f(0,3) = 3^3 - 12 \cdot 3 = -9$

$f(Q_4) = f(1,3) = 3^3 + 1^3 - 3.1 - 12.3 = -11$

$f(Q_5) = f(3,3) = 2^3 - 15.3 = 9$

$f(Q_6) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -10\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Observe que $-18 < -10\sqrt{\frac{5}{2}}$, pois $\left(10\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = 250 < 18^2$.

Comparando todos os valores segue que
-18 é valor mínimo de f em D
9 é valor máximo de f em D

$P = (1,2)$ é ponto de mínimo de f em D
$Q_5 = (3,3)$ é ponto de máximo de f em D.

Questão 2. (3,5) Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2$.

a) Mostre que f tem exatamente dois pontos de mínimo e infinitos pontos de máximo na esfera

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

b) Determine os pontos de mínimo e de máximo de f no conjunto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}.$$

Solução: a) Se (x,y,z) é ponto de extremo de f em S, então $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $\nabla g(x,y,z)$, sendo $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Então

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} yz = -yz \\ xz = -xz \\ xy = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yz = 0 \\ 2xz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } z = 0 \\ x = 0 \text{ ou } z = 0 \end{cases}$$

(i) Se $z = 0$, o sistema é satisfeito para qualquer par (x,y). Substituindo em S vemos que os candidatos são os pontos $(x,y,0)$ tais que $x^2 + y^2 = 1$. O valor de f nestes infinitos pontos é igual a 3.

(ii) Se $z \neq 0$, devemos tem $x = y = 0$. Substituindo em S vemos que os candidatos são os pontos $(0,0,\pm 1)$. Temos que $f(0,0,\pm 1) = 1$.

Comparando os valores, vemos que os pontos de máximo de f são os (infinitos) pontos de (i) enquanto que os de mínimo são $(0,0,\pm 1)$.

b) Se (x,y,z) é ponto de extremo de f em D, então $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ é LI, sendo $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $h(x,y,z) = x + y + z$. Então

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -z(x-y) - z(x-y) = 0 \Leftrightarrow -2z(x-y) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } x = y.$$

(i) Se $z = 0$, substituindo em D obtemos os pontos $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$. Temos que $f(0,1,0) = f(1,0,0) = 3$

(ii) Se $x = y$, substituindo em D obtemos os pontos $(0,0,1)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Temos que $f(0,0,1) = 1$ e $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = 2 + \frac{7}{9}$.

Comparando os valores, vemos que $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são os pontos de máximo enquanto que $(0,0,1)$ é ponto de mínimo.

Solução Alternativa do item b): Pelo item (a), os pontos $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são pontos de máximo de f na esfera (inteira!). Note que tais pontos estão em D também. Logo tais pontos são pontos de máximo de f em D. Analogamente, $(0,0,1)$ é ponto de mínimo de f na esfera e está em D. Logo tal ponto é de mínimo em D.

(3,0) **Questão 3.** Seja S a superfície dada pela equação $2x^2 - y^2 - 2z^2 + 10 = 0$.

a) Existe **apenas** um ponto A na superfície S tal que a reta normal a S em A contém os pontos $(4,1,4)$ e $(2,-1,0)$. Determine o ponto A;

Sejam $g(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 2z^2 + 10$, $M = (4,1,4)$ e $N = (2,-1,0)$. Considere o vetor $\overrightarrow{MN} = (2,2,4)$ e $\nabla g(x,y,z) = (4x, -2y, -4z)$.

Temos que ter $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = (4x_0, -2y_0, -4z_0) // \overrightarrow{MN}$, ou seja, $2(2x_0, -y_0, 2z_0) = \lambda 2(1,1,2)$.

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\lambda}{2} \\ y_0 = -\lambda \\ z_0 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 - 2\lambda^2 = -10 \Rightarrow \lambda = \pm 2.$$

Se $\lambda = -2$, então $A = (-1,2,2) \Rightarrow r : X = (-1,2,2) + \alpha(1,1,2), \alpha \in \mathbb{R}$, mas r não contém nem M e nem N.

Se $\lambda = 2$, então $A = (1,-2,-2) \Rightarrow s : X = (1,-2,-2) + \beta(1,1,2), \beta \in \mathbb{R}$. Como s contém os pontos M e N, temos que $A = (1,-2,-2)$.

b) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciáveis com $\nabla f(-1,-2) = (1,b)$. Suponha que a imagem de γ é a intersecção do gráfico de f com a superfície S, dada no item (a), e que o ponto $P = (-1,-2,-2)$ pertence à imagem de γ.
Determine b de modo que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P e dê uma equação da reta tangente à Im_γ no ponto P.

Seja $\vec{n}$ o vetor normal ao gráfico de f no ponto $(-1,-2,f(-1,-2))$, então $\vec{n} = (1,b,-1)$.

Para que o que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P, temos que ter $\vec{n}$ ortogonal à $\nabla g(-1,-2,-2)$. Ou seja,

$$\vec{n}.\nabla g(-1,-2,-2) = (1,b,-1).(-4,4,8) = 0.$$

Portanto, $b = 3$.

O vetor diretor da reta tangente à Im_γ no ponto P é dado por:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4(7,-1,4).$$

Então a equação da reta é $X = (-1,-2,-2) + \mu(7,-1,4), \mu \in \mathbb{R}$.