(3,5) **Questão 1.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f;

b) Determine, caso existam, os pontos de máximo e de mínimo de f no conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3 \ \text{ e } \ 0 \le y \le x\}.$$

a) Pts Críticos: $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12, 3y^2 - 3) = \vec{0} \Leftrightarrow$ $x = \pm 2$ e $y = \pm 1$

Pts Críticos: $(2,1), (-2,-1), (2,-1)$ e $(-2,1)$

Classificação: $H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy.$

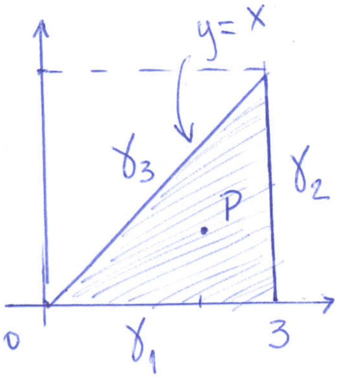
- $H(2,-1) = H(-2,1) = -72 < 0 \Rightarrow (2,-1)$ e $(-2,1)$ são pontos de sela.
- $H(2,1) = 72$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 12 \Rightarrow (2,1)$ é pt de mínimo local.
- $H(-2,-1) = 72$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}(2,-1) = -12 \Rightarrow (-2,-1)$ é pt de máximo local.

b) D é um conjunto fechado e limitado, ∴ compacto, e f é uma função contínua. Pelo teorema de Weierstrass f assume, em D, valor mínimo e valor máximo.

Candidatos a pontos de máximo e mínimo em D
- No interior (I)
- Na fronteira (II)

(I) O candidato no interior de D é $P = (2,1)$

(II)



A fronteira de D é a reunião de três segmentos parametrizados por γ_1, γ_2 e γ_3

(1) $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,3] = I$

$f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = t^3 - 12t$

$(f \circ \gamma_1)'(t) = 3t^2 - 12 = 0 \overset{t \in I}{\Longrightarrow} t = 2$

Candidatos: $Q_1 = (0,0)$ $(t=0)$ $Q_2 = (2,0)$ $(t=2)$ e $Q_3 = (3,0)$ $(t=3$

② $\gamma_2(t) = (3, t)$, $t \in I$

$$f \circ \gamma_2(t) = f(3,t) = 3^3 + t^3 - 12 \cdot 3 - 3t$$
$$= t^3 - 3t - 9 \quad (f \circ \gamma_2)'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$$

Candidatos: $Q_3 = (3,0)$ $\quad Q_4 = (3,1)$ $\quad Q_5 = (3,3)$

($t=0$ e $t=3$ são extremos de I, $t=1$ é crítico de $f \circ \gamma_2$).

③ $\gamma_3(t) = (t, t)$ $t \in I$.

$$f \circ \gamma_3(t) = f(t,t) = 2t^3 - 15t$$

$$(f \circ \gamma_3)' = 6t^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5 = 0 \xrightarrow{t \in I} t = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Candidatos: $Q_1 = (0,0)$ $\quad Q = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ $\quad Q = (3,3)$.

- Comparação de valores de f nos candidatos

- $f(P) = f(2,1) = 2^3 + 1^3 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 9 - 3(8+1) = -18$
- $f(Q_1) = f(0,0) = 0$
- $f(Q_2) = f(2,0) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 2^3(1-3) = -16$.
- $f(Q_3) = f(3,0) = 3^3 - 12 \cdot 3 = 3^2(3-4) = -9$
- $f(Q_4) = f(3,1) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 1^3 - 3 \cdot 1 = -9 - 2 = -11$
- $f(Q_5) = f(3,3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3 = 3^2(2 \cdot 3 - 5) = 9$
- $f(Q_6) = f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - 15\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}(5 - 15) = -10\sqrt{\frac{5}{2}}$

Observe que $\left(10\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = 250 < 18^2$ e comparando com outros valores segue que -18 é valor mínimo de f em D

9 é valor máximo de f em D.

$P = (2,1)$ é ponto de mínimo de f em D

$Q_5 = (3,3)$ é ponto de máximo de f em D.

Questão 2. (3,5) Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 3$.

a) Mostre que f tem exatamente dois pontos de mínimo e infinitos pontos de máximo na esfera

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

b) Determine os pontos de mínimo e de máximo de f no conjunto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}.$$

Solução: a) Se (x,y,z) é ponto de extremo de f em S, então $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $\nabla g(x,y,z)$, sendo $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Então

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} yz = -yz \\ xz = -xz \\ xy = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yz = 0 \\ 2xz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } z = 0 \\ x = 0 \text{ ou } z = 0 \end{cases}$$

(i) Se $z = 0$, o sistema é satisfeito para qualquer par (x,y). Substituindo em S vemos que os candidatos são os pontos $(x,y,0)$ tais que $x^2 + y^2 = 1$. O valor de f nestes infinitos pontos é igual a 4.

(ii) Se $z \neq 0$, devemos tem $x = y = 0$. Substituindo em S vemos que os candidatos são os pontos $(0,0,\pm 1)$. Temos que $f(0,0,\pm 1) = 2$.

Comparando os valores, vemos que os pontos de máximo de f são os (infinitos) pontos de (i) enquanto que os de mínimo são $(0,0,\pm 1)$.

b) Se (x,y,z) é ponto de extremo de f em D, então $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ é LI, sendo $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $h(x,y,z) = x + y + z$. Então

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -z(x-y) - z(x-y) = 0 \Leftrightarrow -2z(x-y) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } x = y.$$

(i) Se $z = 0$, substituindo em D obtemos os pontos $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$. Temos que $f(0,1,0) = f(1,0,0) = 4$

(ii) Se $x = y$, substituindo em D obtemos os pontos $(0,0,1)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Temos que $f(0,0,1) = 2$ e $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = 3 + \frac{7}{9}$.

Comparando os valores, vemos que $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são os pontos de máximo enquanto que $(0,0,1)$ é ponto de mínimo.

Solução Alternativa do item b): Pelo item (a), os pontos $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são pontos de máximo de f na esfera (inteira!). Note que tais pontos estão em D também. Logo tais pontos são pontos de máximo de f em D. Analogamente, $(0,0,1)$ é ponto de mínimo de f na esfera e está em D. Logo tal ponto é de mínimo em D.

(3,0) **Questão 3.** Seja S a superfície dada pela equação $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10 = 0$.

a) Existe **apenas** um ponto A na superfície S tal que a reta normal a S em A contém os pontos $(3, 0, 4)$ e $(1, -2, 0)$. Determine o ponto A;

Sejam $g(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10$, $M = (3, 0, 4)$ e $N = (1, -2, 0)$. Considere o vetor $\overrightarrow{MN} = (2, 2, 4)$ e $\nabla g(x, y, z) = (2x, -4y, 4z)$.

Temos que ter $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, -4y_0, 4z_0) // \overrightarrow{MN}$, ou seja, $2(x_0, -2y_0, 2z_0) = \lambda 2(1, 1, 2)$.

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ y_0 = -\frac{\lambda}{2} \\ z_0 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda^2 = 10 \Rightarrow \lambda = \pm 2.$$

Se $\lambda = -2$, então $A = (-2, 1, -2) \Rightarrow r : X = (-2, 1, -2) + \alpha(1, 1, 2), \alpha \in \mathbb{R}$, mas r não contém nem M e nem N.

Se $\lambda = 2$, então $A = (2, -1, 2) \Rightarrow s : X = (2, -1, 2) + \beta(1, 1, 2), \beta \in \mathbb{R}$. Como s contém os pontos M e N, temos que $A = (2, -1, 2)$.

b) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ diferenciáveis com $\nabla f(-2, -1) = (b, 1)$. Suponha que a imagem de γ é a intersecção do gráfico de f com a superfície S, dada no item (a), e que o ponto $P = (-2, -1, -2)$ pertence à imagem de γ.
Determine b de modo que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P e dê uma equação da reta tangente à Im_γ no ponto P.

Seja $\vec{n}$ o vetor normal ao gráfico de f no ponto $(-2, -1, f(-2, -1))$, então $\vec{n} = (b, 1, -1)$.

Para que o que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P, temos que ter $\vec{n}$ ortogonal à $\nabla g(-2, -1, -2)$. Ou seja,

$$\vec{n}.\nabla g(-2, -1, -2) = (b, 1, -1).(-4, 4, -8) = 0.$$

Portanto, $b = 3$.

O vetor diretor da reta tangente à Im_γ no ponto P é dado por:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 4(-1, 7, 4).$$

Então a equação da reta é $X = (-2, -1, -2) + \mu(-1, 7, 4), \mu \in \mathbb{R}$.