1ª Questão: (3,5) Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{1/3}$, determine:

(a) O domínio das funções derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas.

(c) Os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+y^2)^{1/3} + x^2 \cdot \dfrac{2}{3}(x^2+y^2)^{-2/3}$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h} \cdot h^{2/3}}{\cancel{h}} = 0$

Conclusão: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{1/3} + \frac{2}{3}x^2(x^2+y^2)^{-2/3}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e Dom$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2}{3}xy(x^2+y^2)^{-2/3}$, se $(x,y) \neq (0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

Conclusão: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}xy(x^2+y^2)^{-2/3} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e Dom$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Basta verificar em $(0,0)$, já que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$ se e somente se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)^{1/3}}_{\to 0} + \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{2/3}}_{\text{limitada } (*)} \cdot \underbrace{x^{2/3}}_{\to 0} = 0$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua também em $(0,0)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$ se e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2}{3} \underbrace{\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{2/3}}_{\text{limitada }(*)} \cdot \underbrace{(xy)^{1/3}}_{\to 0} = 0$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, temos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua também em $(0,0)$.

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são ambas funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

c) Por b) sabemos que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$

$(*)$ $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{2/3} \leq 1$ já que $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \leq 1 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\left(\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right)^{2/3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$ já que $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

2ª Questão: (3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2, 8)$. Sabendo que a imagem de γ está contida no gráfico de f e que a reta r passa pelo ponto $(1, -4)$, determine:

(a) o vetor gradiente de f no ponto $(2, 8)$;

(b) a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 8, f(2, 8))$.

(a) A reta tangente r à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$ passa também pelo ponto $(1,-4)$. Portanto, um vetor diretor de r é

$\vec{v} = (2-1, 8-(-4)) = (1, 12)$.

Como $(\nabla f)(2,8) \perp \vec{v}$, obtemos

(1) $\boxed{(\nabla f)(2,8) = k(12,-1)}$ sendo k constante real

Por outro lado, como $\operatorname{Im}\gamma \subset G_f$, temos:

$t^2 = f(t, 2t^2), \forall t \in \mathbb{R}$.

Sendo f e γ diferenciáveis, segue da regra da Cadeia, q

$(\nabla f)(t, 2t^2) \cdot (1, 4t) = 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Tomando $t=2$,

(2) $\boxed{(\nabla f)(2,8) \cdot (1,8) = 4}$

De (1) e (2) segue que

$k \cdot (12,-1) \cdot (1,8) = 4 \iff k \cdot 4 = 4 \iff k = 1$.

Substituindo em (1), concluimos que

$\boxed{(\nabla f)(2,8) = (12,-1).}$

(b) A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,8,f(2,8))$ é

$$z - f(2,8) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,8)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,8)(y-8).$$

Do ítem (a) temos $\frac{\partial f}{\partial x}(2,8) = 12$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,8) = -1$ e $f(2,8) = 4$. Portanto, a equação do plano é:

$$(z-4) = 12(x-2) - (y-8) \Longleftrightarrow -12x + y + z = -24 + 8 + 4$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{12x - y - z = 12}$$

GABARITO

Turmas A e B.

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,5) Seja $G = G(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e considere $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(s,t) = sG(st,-s).$$

(a) Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial s}(s,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial t}(s,t)$ e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s,t)$ em termos das derivadas parciais de G.

(b) Sabendo que o plano tangente ao gráfico de G no ponto $(-2,-2,G(-2,-2))$ tem equação $x - y + 2z + 1 = 0$, determine o vetor $\nabla G(-2,-2)$ e o valor de $G(-2,-2)$.

(c) Determine o vetor unitário $\vec{u} = (a,b)$ tal que a derivada direcional $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}(2,-1)$ seja máxima.

$$F(s,t) = s\,G(x(s,t),y(s,t)), \quad \begin{cases} x(s,t) = st \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial s} = t \text{ e } \dfrac{\partial x}{\partial t} = s \\ y(s,t) = -s \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial s} = -1 \text{ e } \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

F de classe $\mathcal{C}^2$ por ser composta por funções de classe $\mathcal{C}^2$.

a) $$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = 1 \cdot G(x(s,t),y(s,t)) + s\left[\frac{\partial G}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = G(st,-s) + s\left[t\frac{\partial G}{\partial x}(st,-s) - \frac{\partial G}{\partial y}(st,-s)\right].$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = s\left[\frac{\partial G}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial y}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = s^2\frac{\partial G}{\partial x}(st,-s).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}(s,t) = 2s\frac{\partial G}{\partial x}(st,-s) + s^2\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(st,-s)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}(st,-s)\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}(s,t) = 2s\frac{\partial G}{\partial x}(st,-s) + s^2 t\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(st,-s) - s^2\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}(st,-s).$$

b) Seja π o plano tangente ao Gr G no pt $(-2,-2,G(-2,-2))$.

Temos $(\pi)\ x-y+2z+1=0 \iff \boxed{z=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}}$ (I)

e escrevendo $a=\frac{\partial G}{\partial x}(-2,-2)$ e $b=\frac{\partial G}{\partial y}(-2,-2)$, também

temos $(\pi)\ z=G(-2,2)+a(x+2)+b(y+2)$

$\iff \boxed{z=ax+by+2a+2b+G(-2,-2)}$ (II)

Comparando I e II, segue que $a=-\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{2}$

e $2a+2b+G(-2,-2)=-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+G(-2,-2)=-\frac{1}{2}$

Logo: $\underline{G(-2,-2)=-1/2}$ e $\underline{\nabla G(-2,-2)=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

c) G de classe $C^2 \Rightarrow$ F de classe C^2 e $\therefore$ F é diferenciável. Pela regra da cadeia, temos

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1)=\nabla f(2,-1)\cdot\vec{u}=\|\nabla f(2,-1)\|\|\vec{u}\|\cos\theta$.

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1)$ atinge valor máximo para $\cos\theta=1$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial u}(2,-1)$ atinge valor máximo para $\cos\theta=1$ ou seja para $u=\frac{\nabla f(2,-1)}{\|\nabla f(2,-1)\|}$

Para $s=2$ e $t=-1$ temos $(x,y)=(st,-s)=(-2,-2)$

e do item a $\frac{\partial F}{\partial s}(2,-1)=G(-2,-2)-2\frac{\partial G}{\partial x}(-2,-2)-2\frac{\partial G}{\partial y}(-2,-2)$

$=-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

$\frac{\partial F}{\partial t}(2,-1)=4\cdot\frac{\partial G}{\partial x}(-2,-2)=4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=-2$.

Daí $\nabla F(2,-1)=\left(\frac{-1}{2},-2\right)$, $\|\nabla F(2,-1)\|=\sqrt{\frac{17}{4}}$ e $\vec{u}=\frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{-1}{2},-2\right)$