MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2011

3$^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1) Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

2) Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos, onde:

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3 y$.

(b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x, y, z) = xz + y$.

(d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

3) Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

4) Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

5) Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

6) Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

7) Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

8) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

9) Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x-1)^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}-(z-1)^2=0$ nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.

10) Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

a) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^z + \operatorname{sen}(y),\ (2,0,0)$ b) $f(x,y,z) = -\dfrac{4}{y} + z\ln(x),\ (1,2,-1)$

11) Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\mathrm{v} = \mathrm{i}+\mathrm{j}-\mathrm{k}$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

(c) Qual é a maior taxa de variação em P?

12) Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

a) $f(x,y) = 5-3x+4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

b) $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2,\ x\le 0,\ \ y\ge 0\}$

c) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

d) $f(x,y) = (4x-x^2)\cos y$; $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 3,\ \ -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}\}$

13) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

a) $f(x,y) = xy$; $5x^2+5y^2+6xy-64=0$

b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2+2y^2+3z^2=6$

c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2=1$

d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $x^4+y^4+z^4=1$

14) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo

a) $f(x,y,z) = x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z$ e $R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\le 56\}$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4xy-4z+3x$ e $R = \{(x,y,z) : x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+y+z\le 4\}$

15) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

a) $f(x,y) = xy$; $D = \{(x,y) : x^2-y^2=1,\ \ x\in[1,2]\}$

b) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \{(x,y) : x^2+y^2=1,\ \ x\in[0,1/4],\ y\ge 0\}$

Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?

16) a) Encontre os pontos da elipse $x^2+xy+y^2=3$ mais próximos de $(0,0)$.

b) Qual o ponto do plano $x+2y-z+4=0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?

17) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

18) Determine a distância entre as retas de equação

$X = (-2,3,-1)+\alpha(4,1,5),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$ e $X = (-1,0,3)+\mu(-2,3,1),\ \ \mu\in\mathbb{R}$.

19) Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?

20) Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$.

21) Seja $T(x,y) = \dfrac{4}{x^2+y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x,y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq -x+1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima?

22) Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x,y) = \dfrac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.

a) Determine, em função de b, o número de pontos críticos de f e classifique-os.

b) Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.

23) Seja $f(x,y) = k(x^2+y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.

(a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

(b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f?

24) A temperatura num ponto (x,y,z) do espaço é dada por $T(x,y,z) = xy + yz$. Determine os pontos da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ onde a temperatura é mais alta e onde é mais baixa. Justifique.

25) Considere o seguinte problema: "Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$".

a) Mostre que o problema tem solução.

b) Resolva o problema.

26) Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, sem parametrizar C, onde:

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1 \text{ e } 4x+4y = z^2\}$.

(b) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ e $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } x+y+z = 1\}$

(c) f e C como no exercício 2.a);

(d) f e C como no exercício 2.b).

27) Seja $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$.

a) Seja S a parte do hiperbolóide $4x^2+y^2-z^2+1 = 0$ onde $z > 0$. Seja C o compacto que é a intersecção de S com o plano $2z = 2x + y + 4$. Encontre o máximo e o mínimo de f em C.

b) Seja R o compacto

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0, \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}.$$

Encontre o mínimo de f em R.

RESOLVA OS EXERCÍCIOS 28 A 32, A SEGUIR, ASSUMINDO QUE CADA PROBLEMA PROPOSTO TEM SOLUÇÃO. É POSSÍVEL PROVAR QUE ESSAS SOLUÇÕES EXISTEM. TENTE FAZÊ-LO.

28) Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

29) Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

30) Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

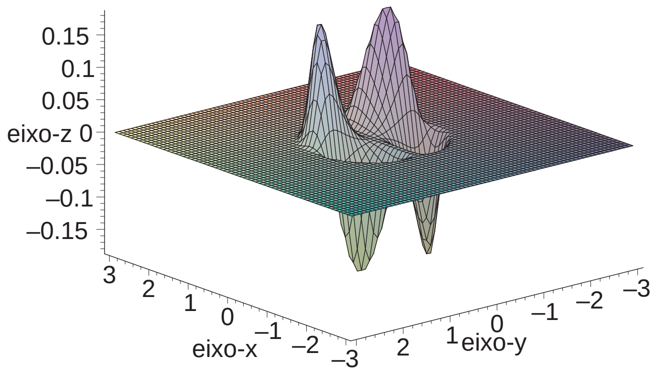
31) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

32) Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobre, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

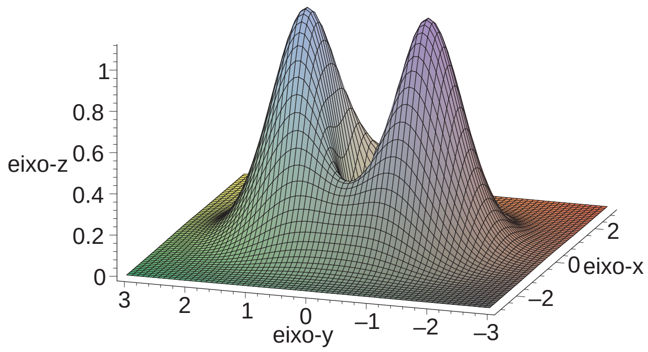
33) Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
c) $z = x^2y^2$
d) $z = x^3y^3$
e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
f) $z = y \cos x$
g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
i) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
k) $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$

34) A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x, y) = xy^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)^4}$.
a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.
b) Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.
c) Classifique os demais pontos críticos.



35) A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f.



36) Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

37) É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

38) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

39) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. (Dica: dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.)

40) [Método dos Mínimos Quadrados] Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leqslant i \leqslant n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é, em geral, sobredeterminado se $n \geqslant 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimize a soma dos quadrados dos erros $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(a,b) \doteq \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

RESPOSTAS

1. $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. (a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$. (b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$. (c) ponto de máximo: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$; ponto de mínimo: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$. (d) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

6. $(5, 8, 6)$.

7. $X = (1,1,4) + \lambda(-1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}$.

8. $X = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5), \lambda \in \mathbb{R}$.

9. $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$

10. a) $\sqrt{6}$; $(1,1,2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1,1,0)$.

11. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38, 6, 12)$ c) $2\sqrt{406}$.

12. a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$; b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$; c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$; d) máximo: $f(2,0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

13. a) máx $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; mín $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$; b) máx $2/\sqrt{3}$, mín $-2/\sqrt{3}$; c) máx $1/27$, mín 0; d) máx $\sqrt{3}$, mín 1.

14. a) Valor mínimo: -14, Ponto de mínimo (1, 2, 3); Valor máximo 112, Ponto de máximo (-2, -4, -6)

15. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

16. (a) $(1, 1)$ e $(-1, -1)$; (b) $(0, -1, 2)$.

17. $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

18. $\sqrt{12}$.

19. $(0, 0, 1)$ ou $(0, 0, -1)$.

20. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

21. ponto de máximo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; não há ponto de mínimo.

22. a) Se $b > 0$, temos 5 pontos críticos: $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{b}}, 1\right)$ e $(0, -2)$ pontos de sela; $(0, -2)$ máx. local e $(0, 2)$ mín. local; e se $b < 0$, temos 3 pontos críticos: $(0, 0)$ e $(0, 2)$ pontos de sela; $(0, -2)$ mín. local.

b) Pontos de máx: $(-3, 3)$ e $(3, 3)$; ponto de mín. $(0, 2)$.

23. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0, 0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0, 0)$ é ponto de máximo global.

24. Mais quentes: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$; Mais frios : $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

25. O paralelepípedo tem vértices em $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$.

26. (a) pontos de mínimo: $(0, 1, -2)$ e $(1, 0, -2)$; ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$.
(b) pontos de mínimo: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; pontos de máximo: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$.

27. a) Ponto mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$ valor mínimo:$-19 - 6\sqrt{7}$
Ponto de máximo: $(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7})$ valor mínimo:$-19 + 6\sqrt{7}$

b) Ponto de mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$ valor mínimo:$-19 - 6\sqrt{7}$
Ponto de máximo: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ valor mínimo: $-\frac{1}{2}$

28. $12(2 - \sqrt{3})$, $2(3 - \sqrt{3})$, $4(2\sqrt{3} - 3)$

29. $x + y + 2z - 6 = 0$

30. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
$2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

31. base 3×3cm, altura 1,5cm.

32. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.

33. a) $(-3,2)$ mínimo; b) $(2/3,1)$, $(-4/3,-1)$ selas; c) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4,4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1,1)$ máximo, $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$ selas; h) $(0,0)$ máximo, $(0,2)$ mínimo, $(0,-2),(\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},1)$ selas; i) $(0,0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3,0)$ mínimo; k) $(2,1)$ e $(0,3)$ sela; $(2,3)$ mínimo e $(0,1)$ máximo.

34. a) $(a,0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2}\cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2}\cdot 6^{-3/8})$.

35. mínimo $f(0,0) = 0$; máximo $f(0,\pm 1) = 3\mathrm{e}^{-1}$

36. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.