MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

1ª lista de exercícios - 2011

CURVAS E SUPERFÍCIES

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t)$

   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$

   (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$

   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$

   (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$

   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

   (a) $x = t^3 - 2t$, $\;y = t^2 - t$

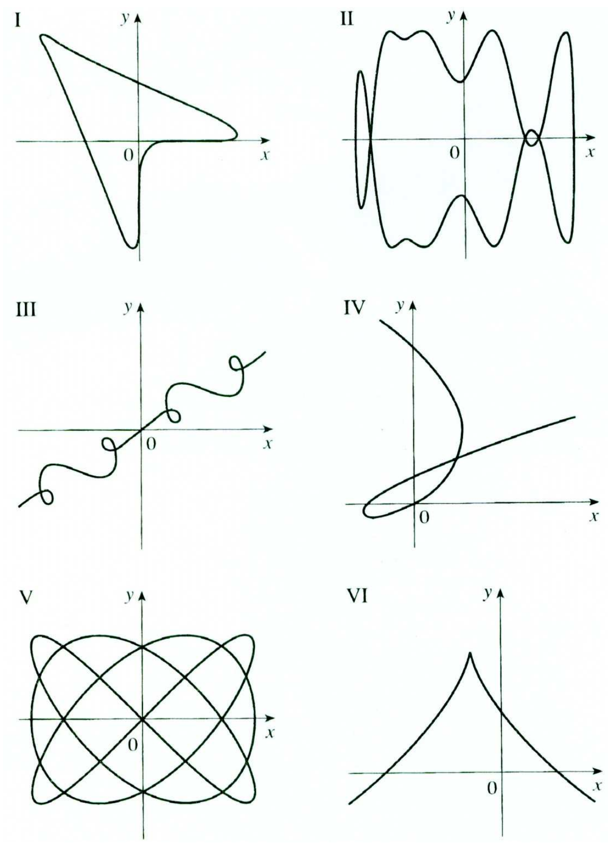
   (b) $x = t^3 - 1$, $\;y = 2 - t^2$

   (c) $x = \operatorname{sen}(3t)$, $\;y = \operatorname{sen}(4t)$

   (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t)$, $\;y = t + \operatorname{sen}(3t)$

   (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t)$, $\;y = \cos(t + \cos t)$

   (f) $x = \cos t$, $\;y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



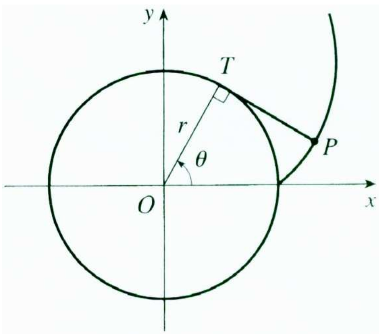
3. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\, ,\ \operatorname{sen}\, t \cos\, t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

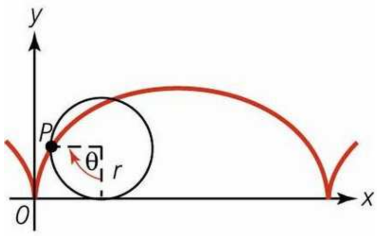
5. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

6. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



7. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja figura.)



8. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$

   (e) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

   (g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

9. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

10. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$

(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

(e) $f(x,y) = y^2 - x^2$

(f) $f(x,y) = y^2 + 1$

(g) $f(x,y) = y^2 + x$

(h) $f(x,y) = xy$

(i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$

(k) $f(x,y) = (x-y)^2$

(l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$

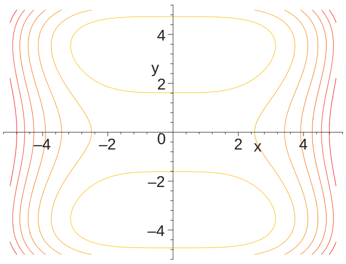
(n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$

(o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

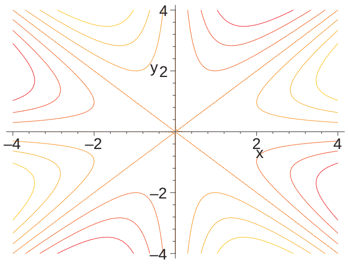
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$

(q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$

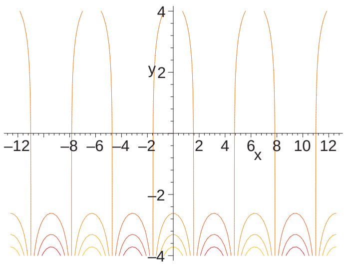
11. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



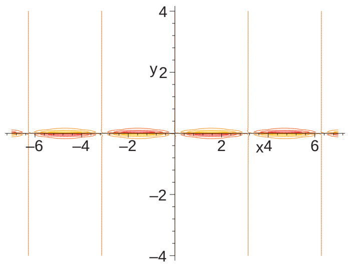
(I)



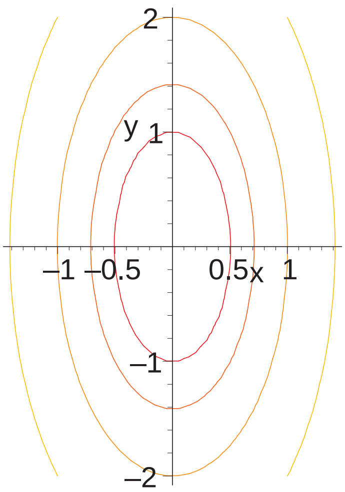
(II)



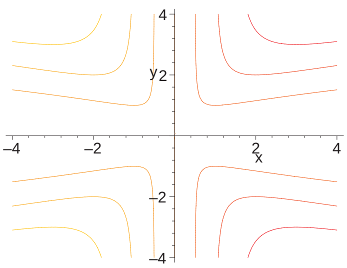
(III)



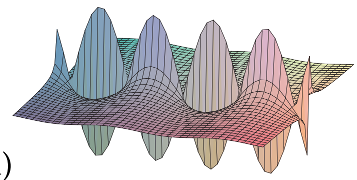
(IV)



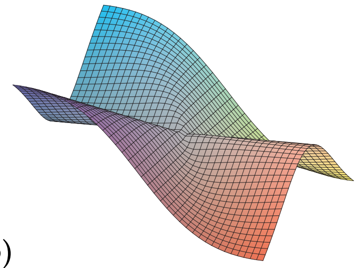
(V)



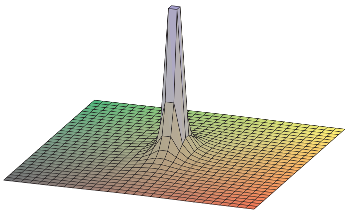
(VI)



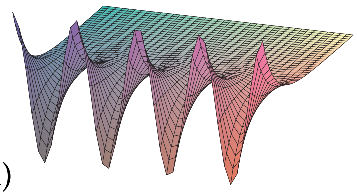
(a)



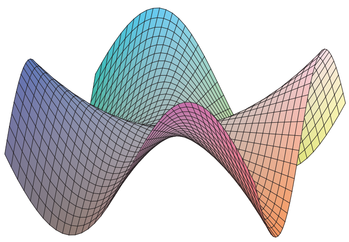
(b)



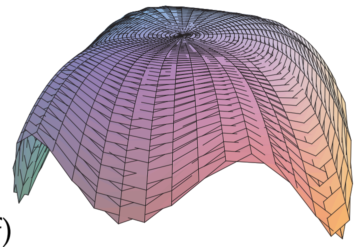
(c)



(d)



(e)



(f)

12. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

    (b) A imagem de γ está contida em alguma curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

    (a) $x + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
    (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
    (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

    Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

14. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0, 0, 0)$ e esboce a imagem de γ.

15. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1}\cos t, \sqrt{t^2 + 1}\operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

16. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

    (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
    (c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$, $t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$
    (e)$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

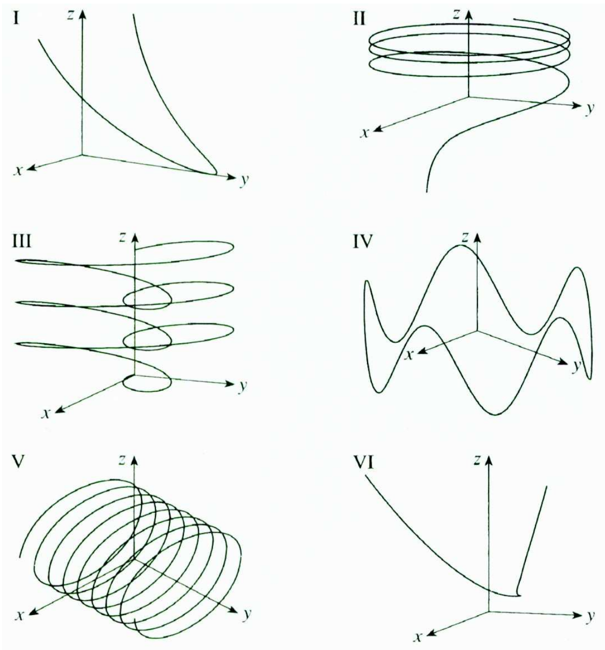
17. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t\,\text{sen}\, t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.

(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

(b) Faça um esboço da imagem de γ.

18. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \text{sen}\, 4t)$	(b) $\gamma(t) = (t^2-2, t^3, t^4+1)$
(c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$	(d) $\gamma(t) = (\text{sen}\, 3t\ \cos t, \text{sen}\, 3t\ \text{sen}\, t, t)$
(e)$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, \ln t)$	(f) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, \text{sen}\, 5t)$



19. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

(a) $f(x,y) = x + 2y - 3$, $k = -2$;

(b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}$, $k = 5$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$, $k = 1$.

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6,0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

20. (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.
(c) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
(d) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2+y^2}$ com o plano $z = 2x + 1$.

21. Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P, onde:

   (a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

   (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (0,1,1)$.

   (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

22. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

   (a) Esboce as curvas de nível c de f, para $c=1$, $c=2$ e $c=3$.

   (b) Encontre uma curva γ derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível 1 de f.

   (c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

   (d) Seja $\Gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

LIMITES E CONTINUIDADE

23. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o por quê:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

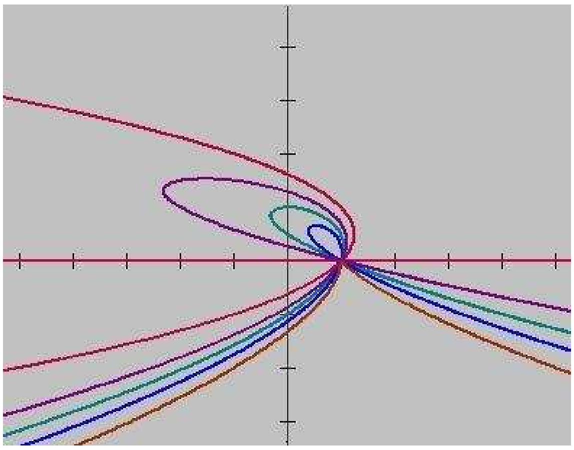
24. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

25. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

26. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível $k = 0$, $k = 0,3$, $k = 0,5$, $k = 0,7$ e $k = 1$ de f. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



RESPOSTAS

3. Não. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

4. $y = x$ e $y = -x$.

8. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$
(b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
(f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$
(g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

12. (b) Sim, no nível 5.

13. Apenas a superfície do item (a).

19. (a) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t))$; reta tangente: $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$
(b) $\gamma\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (5 + \text{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t))$; reta tangente: $X = (6,0) + \lambda(1,0), \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\gamma_1\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (\sec(t),\operatorname{tg}(t))$ parametriza um ramo da hipérbole e $\gamma_2\colon]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (\sec(t),\operatorname{tg}(t))$ parametriza o outro ramo. Reta tangente: $X = (\sqrt{2},1)+\lambda(\sqrt{2},1), \lambda\in\mathbb{R}$

20. (a) $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t),\operatorname{sen}(t),-\cos(2t))$

    (b) $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)-1, \operatorname{sen}(t)-1)$

    (c) $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t))$

    (d) $\gamma\colon \mathbb{R}\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2-1), t, \frac{1}{2}(t^2+1))$

21. (a) $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(\cos(t)-1), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2}(\cos(t)+1))$. Nessa parametrização, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$, assim o vetor tangente à trajetória de γ nesse ponto é paralelo a $\overrightarrow{\gamma}'(\frac{\pi}{2})$.
    Reta tangente: $X = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})+\lambda(-1,0,-1), \lambda\in\mathbb{R}$

    (b) $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(t^2-1), t, \frac{1}{2}(t^2+1))$. Reta tangente: $X = (0,1,1)+\lambda(1,1,1), \lambda\in\mathbb{R}$

    (c) $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\frac{1}{2}(1-\cos(t)), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t), \frac{1}{2}(\cos(t)+1))$. Reta tangente: $X = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})+\lambda(1,0,-1), \lambda\in\mathbb{R}$.

22. Veja a solução na P1 de 2009.

23. (a) não existe — (b) 0 — (c) 0
    (d) não existe — (e) não existe — (f) não existe
    (g) não existe — (h) 0 — (i) 0
    (j) 0 — (k) não existe — (l) 1

24. (a) 1 — (b) 0

25. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$