2. (2,0) Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de **ambas** as curvas

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = \left(u, u+1, u+2+\frac{1}{u}\right), u \in \mathbb{R}, u \neq 0.$$

(a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(b) Determine $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, onde $\vec{\mathbf{u}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

a) $\gamma(-1) = (-1/2, 1/2, -1/2)$ e $\sigma(-1/2) = (-1/2, 1/2, -1/2)$.
Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas em $Graf(f)$, sabemos que os vetores

$$\gamma'(-1) \text{ e } \sigma'(-1/2)$$

são ambos, paralelos ao plano tangente ao $Graf(f)$ no ponto $(-1/2, 1/2, -1/2)$.

$\gamma'(t) = (1/2, -1/2, 1/2) \Rightarrow \gamma'(-1) = (1/2, -1/2, 1/2)$

$\sigma'(u) = (1, 1, 1 - \frac{1}{u^2}) \Rightarrow \sigma'(-1/2) = (1, 1, -3)$

$$\gamma'(-1) \wedge \sigma'(-1/2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1, 2, 1)$$

é vetor normal ao plano tangente

PLANO TANGENTE: $1(x + 1/2) + 2(y - 1/2) + 1(z + 1/2) = 0$

$$\boxed{x + 2y + z = 0}$$

b) $(1, 2, 1) \,//\, \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1/2, 1/2), \frac{\partial f}{\partial y}(-1/2, 1/2), -1\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1/2, 1/2) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-1/2, 1/2) = -2$

Como f é diferenciável em $(-1/2, 1/2)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1/2, 1/2) = \nabla f(-1/2, 1/2) \cdot \vec{u} = (-1, -2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$