

MAT 2454 - Cálculo II - POLI - 2007

2ª lista de exercícios

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

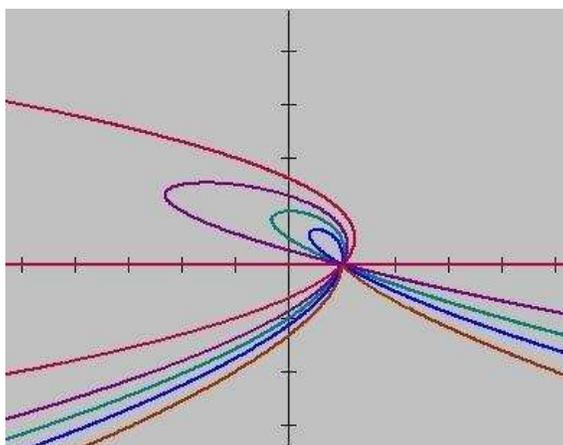
<p>(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$</p> <p>(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$</p> <p>(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$</p> <p>(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + x^2y + y^2}$</p> <p>(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$</p>	<p>(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$</p> <p>(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$</p> <p>(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \text{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$</p> <p>(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$</p> <p>(j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{sen} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$</p>
---	--

2. Calcule os seguintes limites:

<p>(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$</p>	<p>(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$</p>
--	---

3. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (1, 0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k = 0, k = 0,3, k = 0,5, k = 0,7$ e $k = 1$.

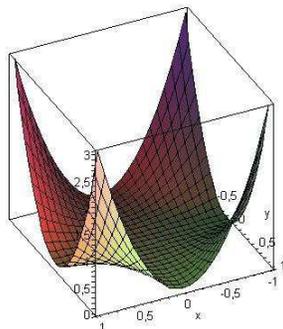
Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$? Justifique.



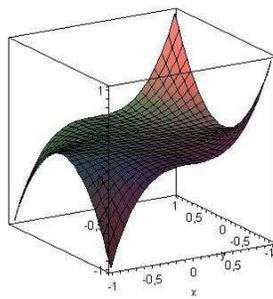
4. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x - 1)^2}{(x^2 + y^2)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2]} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (x, y) \neq (1, 1), \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

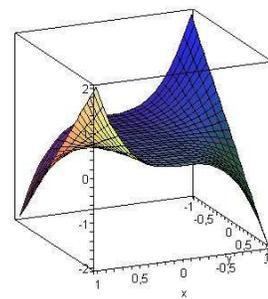
5. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua escolha.



(a)



(b)



(c)

6. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

(a) $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ (b) $f(x, y, z, t) = \frac{x - y}{z - t}$

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a) $u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (b) $u(x, y) = f(ax + by)$, onde a e b são constantes.

8. Dada a função $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\sin(x^2y)}$, ache $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$.

[**Sugestão:** Dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação.]

9. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Verifique que a função $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

11. Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , deriváveis até 2ª ordem.

(a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

12. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em $(0, 0)$?

(c) f é diferenciável em $(0, 0)$?

13. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) É f diferenciável em $(0, 0)$?

(d) São $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0, 0)$?

14. Considere $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$.

(b) As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0, 0)$?

15. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \text{sen}((x^2 + y^2)^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Determine $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

(d) A função f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique sua resposta.

16. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ para todo y , e que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, para todo x .
- (b) Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.
17. Seja $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Determine o conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 onde f **não** é diferenciável.
18. Sejam $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x, y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe \mathcal{C}^1 em \mathbb{R}^2 .
19. Seja $f(x, y) = |xy|$. Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$. Em que pontos de \mathbb{R}^2 a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe? E $\frac{\partial f}{\partial y}$? Observe que f é diferenciável em $(0, 0)$ embora **não** exista nenhum disco aberto D contendo a origem tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existam em todos os pontos $(x, y) \in D$.
20. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x, y) = (x^2y, y^2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
21. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.
- (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$.
- (b) $w = \frac{x}{x^2 + y^2}; x = t \cos u, y = t \sin u$.
- (c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$.
22. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?
23. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da intersecção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?
24. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em \mathbb{R}^2 , com $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

25. Seja $f(x, y)$ uma função de classe \mathcal{C}^2 e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Seja $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au + bv, cu + dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au + bv, cu + dv).$$

26. (a) Seja $v(r, s)$ uma função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 e defina $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$, onde c é constante. Verifique que:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = w(x + ct, x - ct),$$

onde $w(r, s) = -4c^2 v_{rs}(r, s)$.

- *(b) Mostre que se $u(x, t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

[***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 11 (a).]

27. Seja $u = u(x, y)$ função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 e defina $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

28. Seja $f = f(x, y)$ função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 . Se $u(s, t) = f(e^s \cos t, e^s \sin t)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right].$$

29. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** λ se satisfaz

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \text{ para todo } t > 0 \text{ e } (x, y) \in \mathcal{D}_f \quad (H)$$

onde λ é um número real fixado. Suponha que f é uma função de classe \mathcal{C}^2 que é homogênea de grau λ . Prove que:

- (a) $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y);$
- (b) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \lambda(\lambda - 1)f(x, y);$
- (c) As funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são homogêneas de grau $\lambda - 1$.
- (d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:
- (i) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ (ii) $f(x, y) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$
- (iii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}.$

[Sugestões:

- (a) Derive (H) em relação a t e faça $t = 1$.
- (b) Derive (H) duas vezes em relação a t e faça $t = 1$.
- (c) Derive (H) em relação a x e em relação a y .]

30. Seja $F(r, s) = G(e^{rs}, r^3 \cos(s))$, onde $G = G(x, y)$ é uma função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 .

- (a) Calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, s)$ em função das derivadas parciais de G .
- (b) Determine $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1, 0)$ sabendo que $\frac{\partial G}{\partial y}(t^2 + 1, t + 1) = t^2 - 2t + 3$.

31. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

- (a) $z = e^{x^2+y^2}$ no ponto $(0, 0, 1)$,
- (b) $z = \ln(2x + y)$ no ponto $(-1, 3, 0)$,
- (c) $z = x^2 - y^2$ no ponto $(-3, -2, 5)$,
- (d) $z = e^x \ln y$ no ponto $(3, 1, 0)$.

32. Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$. Existe mesmo só um?

33. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0, 1, 5)$ e $(0, 0, 6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3y$.

34. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

35. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 8$ no ponto $(2, 1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

36. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1, 2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r .

37. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 . Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P :

(a) $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right)$;

(b) $\gamma(t) = \left(\frac{t^5}{5}, -\frac{2t^3}{3} + 3t\right)$;

(c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

38. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em \mathbb{R}^2 e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja

$$g(u, v) = u f(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

39. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

passam pela origem.

40. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f . Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

41. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida no gráfico de uma função $z = f(x, y)$ diferenciável. Mostre que a reta tangente a γ em um ponto (x_0, y_0, z_0) está contida no plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0, z_0) .

42. Suponha que a imagem de uma curva γ derivável está contida na intersecção dos gráficos de duas funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, ambas diferenciáveis. Determine a equação vetorial da reta tangente a γ em um de seus pontos, digamos (x_0, y_0, z_0) , em termos dos valores de f, g e de suas derivadas parciais em (x_0, y_0) .
43. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2 \forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \text{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.
44. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.
- $f(x, y) = xe^{-y} + 3y, (1, 0)$;
 - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), (1, 2)$;
 - $f(x, y, z) = x + \frac{y}{z}, (4, 3, -1)$;
 - $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}, (4, 2, 1)$.
45. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 e considere os pontos $A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de \overrightarrow{AB} é 3 e que a derivada direcional de f em A na direção de \overrightarrow{AC} é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção de \overrightarrow{AD} .
46. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. É f diferenciável em $(0, 0)$?
47. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2), \forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f . Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.
48. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.
 - Mostre que $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \neq \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.
 - Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.
 - É f diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

RESPOSTAS

1. (a) não existe (b) 0 (c) 0
 (d) não existe (e) não existe (f) não existe
 (g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0

2. (a) 1 (b) 0

4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

6. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = \frac{1}{z - t}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, t) = \frac{1}{t - z};$
 $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{y - x}{(z - t)^2}; \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = \frac{x - y}{(z - t)^2}.$

7. (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right).$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = af'(ax + by); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = bf'(ax + by).$

8. -2

12. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

13. (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

- (c) Não é diferenciável em (0,0).

- (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em (0,0).

14. (b) Não

15. (b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2 + y^2)^2 \cos((x^2 + y^2)^2) - 2x^2y \operatorname{sen}((x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (c) Sim.

- (d) Sim.

17. f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x.$

22. $-9600\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

23. Estão se distanciando a uma taxa de 10km/h.

24. $a = 3$

29. (d) (i) grau 2; (ii) grau -1 ; (iii) grau $-\frac{3}{2}$.

30. (a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s \cos s \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs} \frac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \frac{\partial G}{\partial y}$;
(b) 0.

31. (a) $z = 1$; $X = (0, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $2x + y - z - 1 = 0$; $X = (-1, 3, 0) + \lambda(2, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0$; $X = (-3, -2, 5) + \lambda(6, -4, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0$; $X = (3, 1, 0) + \lambda(0, e^3, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

32. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um)

33. $6x - y - z + 6 = 0$

34. $k = 8$

35. $\nabla f(2, 1) = (4, 8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

36. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5, -4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

37. (c)

38. $a = -4$

40. $(1, 4)$

42. $X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$,
 $\lambda \in \mathbb{R}$. (Observe que $z_0 = f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$.)

43. $(2, -1)$ e $\left(\frac{10}{9}, -\frac{7}{27} \right)$

44. (a) $\sqrt{5}$, $(1, 2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$;
(c) $\sqrt{11}$, $(1, -1, -3)$; (d) $\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\left(\frac{1}{2}, 0, -2 \right)$.

45. $\frac{327}{13}$.

46. f não é diferenciável em $(0, 0)$.

47. $\frac{4}{5}$

48. (d) Não é.