

a) DERIVADAS DIRECIONAIS

1. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

a) $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$ b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$

c) $f(x, y, z) = x + \frac{y}{z}$, $(4, 3, -1)$ d) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $(4, 2, 1)$.

2. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AB}$ é 3 e que a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AC}$ é 26. Encontre a derivada direcional de f em A na direção de $\overrightarrow{AD}$.

3. Mostre que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$ e aí possui todas as derivadas direcionais. É f diferenciável?

4. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P ?

(c) Qual é a maior taxa de variação em P ?

5. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f . Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.

6. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$.

(b) É f diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

b) POLINÔMIOS DE TAYLOR - 1 VARIÁVEL

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:
a) $\sqrt[3]{8,2}$ b) $\ln(1,3)$ c) $\sin(0,1)$

2. Mostre que:

a) $|\sin x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n natural ímpar. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

b) Avalie $\sin 1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

b) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

c) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right) \right| \leq \frac{e^{x^2} x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

6. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 em I . Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o “teste da segunda derivada”, isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e

a) se $f''(a) > 0$ então f tem um mínimo local em a ;

b) se $f''(a) < 0$ então f tem máximo local em a .

c) POLINÔMIOS DE TAYLOR - 2 VARIÁVEIS

1. Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$.
 - a) Determine o polinômio de Taylor de ordem um de f em torno de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 - b) Mostre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x + y > 1$, tem-se

$$|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$$

2. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto dado:
 - a) $f(x, y) = e^{x+5y}$, $P = (0, 0)$;
 - b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $P = (1, 1)$;
 - c) $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$, $P = (0, 0)$
3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto dado:
 - a) $f(x, y) = x \sin y$, $P = (0, 0)$;
 - b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + x - y$, $P = (1, 1)$
4. Seja $P_2(x, y)$ o polinômio do item a) do exercício 3. Mostre que

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| < \frac{|y|^2}{2} \left(|x| + \frac{|y|}{3} \right)$$

para todo (x, y) com $|x| < 1$.

5. a) Determine o polinômio de Taylor $P(x, y)$ de grau 2, em torno da origem, da função

$$f(x, y) = \ln(1 + x + 2y).$$

- b) Mostre que se $x + 2y > 0$ então

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq \frac{1}{3} \left[|x|^3 + 6|x|^2|y| + 12|x||y|^2 + 8|y|^3 \right].$$

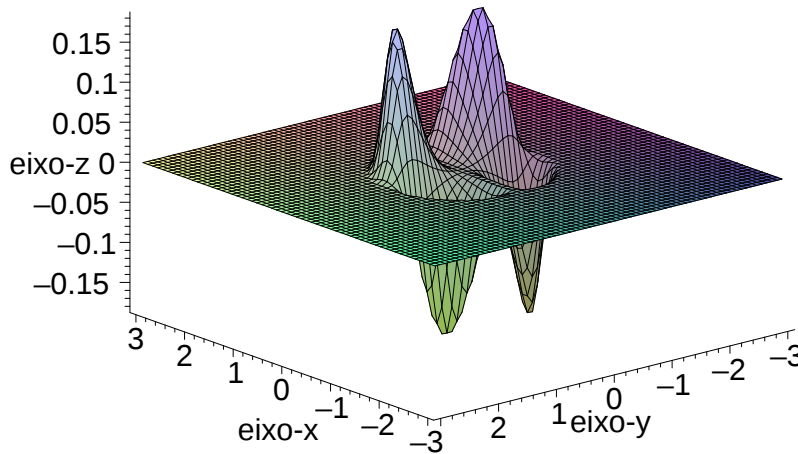
6. Use a fórmula de Taylor para achar uma aproximação quadrática para $f(x, y) = \cos x \cos y$ em torno da origem. Estime o erro na aproximação se $|x| < 0,1$ e $|y| < 0,1$.
7. Sejam $f(x, y) = xe^y$ e $P = (0, 0)$.
 - (a) Ache o polinômio de Taylor $P_2(x, y)$ de ordem 2 de f em torno de P .
 - (b) Mostre que $|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq \frac{3}{2}|x|y^2 + \frac{1}{2}|y|^3$, para todo (x, y) com $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.

d) MÁXIMOS E MÍNIMOS

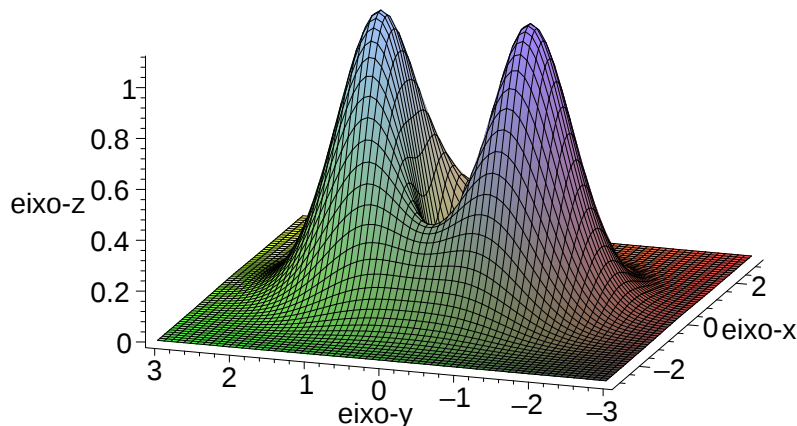
1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ | b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$ |
| c) $z = x^2y^2$ | d) $z = x^3y^3$ |
| e) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ | f) $z = y \cos x$ |
| g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ | h) $z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ |
| i) $z = xye^{-x^2-y^2}$ | j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ |
| k) $z = (x - 1)^3 + (y - 2)^3 - 3x - 3y$ | |

2. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$?
3. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
4. A figura 1 exibe o gráfico de $f(x, y) = xy^2e^{-(x^2+y^2)^4}$.
- Mostre que há um número infinito de pontos críticos.
 - Ache as coordenadas dos 4 pontos críticos exibidos na figura.
 - Classifique os demais pontos críticos.



5. Seja f uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Supondo que $(0,0)$ é ponto crítico de f e que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0$, prove que $(0,0)$ é ponto de mínimo global de f .
6. A figura 2 exibe o gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$. Mostre que há 5 pontos críticos e ache os extremos de f .



7. Determine os valores de a para os quais a função

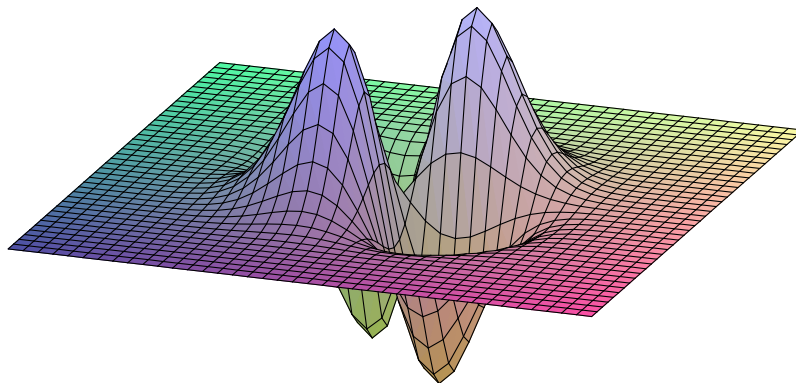
$$f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

- a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
 - b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
- Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
- Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

8. Considere $f(x, y)$ uma função de classe C^2 . Fixado $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no gráfico de f , a intersecção desse gráfico com um plano paralelo ao eixo z e que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é uma curva. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de mínimo de f , então P_0 é um ponto de mínimo dessa curva. Por quê? Por outro lado, se todo plano paralelo ao eixo z e passando por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ intercepta o gráfico de f numa curva que tem um mínimo em P_0 , podemos concluir que P_0 é ponto de mínimo de f ? Mostre que a resposta é negativa examinando a função $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ nas retas $y = mx$ e $x = 0$.

9. Ache os pontos críticos da função $f(x, y) = 10xye^{-x^2-y^2}$. Classifique-os. Qual o maior e o menor valor que f assume?

Dica: Olhe para o gráfico de f na figura 3.



10. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique

que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

11. Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, polinomial, que só tenha um ponto crítico e este ponto seja mínimo local sem ser mínimo global? Analise a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$. Você é capaz de esboçar o gráfico?
12. a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f , então será um extremante global de f . (Dica: dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.)
b) (Método dos Mínimos Quadrados). Sejam $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ pontos do $\mathbb{R}^2$ ($n \geq 3$). Considere a função $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = \sum_{i=1}^n (xa_i + y - b_i)^2$. Prove que a função E tem um único ponto de mínimo global (x_0, y_0) . Qual a relação entre a reta $f(x) = x_0x + y_0$ e os pontos $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$?
13. Determine a distância entre as retas de equação

$$X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e

$$X = (-1, 0, 3) + \alpha(-2, 3, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

14. a) Seja $f(x, y) = x^2 + y$ e considere a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Desenhe várias curvas de nível $x^2 + y = c$ e descubra quais interceptam a circunferência unitária. Determine as duas curvas de nível de f que apenas tocam a circunferência (sem atravessá-la). Qual o significado dos valores c dessas duas curvas?
b) Verifique que o gradiente de f e o gradiente de $g(x, y) = x^2 + y^2$ são paralelos nos pontos de intersecção achados no item a).
c) Determine os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = x^2 + y$ ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Compare suas respostas com o resultado obtido no item a).
15. Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas:
 - a) $f(x, y) = xy$; $9x^2 + y^2 = 4$
 - b) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
 - c) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 - d) $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$
 - e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$
 - f) $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$
16. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.
17. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine aquele que tem área máxima.

18. Qual é o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$ que está mais próximo da origem?
19. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D .)
- $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$.
 - $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$
 - $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$
20. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.
21. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
22. Determine o retângulo de perímetro máximo, com lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.
23. Seja $T(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x, y) do plano. Sabendo que uma partícula está na região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x + 1\}$ qual é a temperatura máxima dessa partícula? E a mínima?
24. Determine o ponto pertencente à interseção da superfície $2z = 16 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, com o plano $x + y = 4$ mais próximo e o mais distante da origem.
25. O plano $x + y + 2z = 2$ corta o parabolóide $z = x^2 + y^2$ numa elipse. Determine o ponto dessa elipse mais próximo e o mais distante da origem.
26. Seja $b \in \mathbb{R}^*$ e $f(x, y) = \frac{y^4}{4} + bx^2y - bx^2 - 2y^2$.
- Determine, em função de b , o número de pontos críticos de f e classifique-os.
 - Faça $b = 3$ e ache os extremos de f no triângulo (fronteira e interior) de vértices $(0,0)$, $(3,3)$ e $(-3,3)$.
27. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.
28. Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.
- Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0,0)$ é um ponto crítico de f .
 - Para cada valor de k , classifique o ponto crítico $(0,0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0,0)$ é extremo global (absoluto) de f ?
29. A temperatura no espaço é dada por $T(x, y, z) = xy + yz$. Dentre os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, quais são os pontos mais quentes e quais os mais frios? Justifique.

RESPOSTAS

a) DERIVADAS DIRECIONAIS

1. a) $\sqrt{5}$; $(1, 2)$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$; c) $\sqrt{11}$; $(1, -1, -3)$; d) $\frac{\sqrt{17}}{2}$; $\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)$.

2. $\frac{327}{13}$.

3. Não.

4. a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$, b) $(38, 6, 12)$, c) $2\sqrt{406}$.

5. $4/5$.

6. a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \frac{2m^3 + n^3}{m^2 + n^2}$, b) Não.

b) POLINÔMIOS DE TAYLOR - 1 VARIÁVEL

1. a) $2 + \frac{1}{60} - \frac{1}{7200}$; $E < 10^{-5}$; b) $0,255$; $E < 10^{-2}$; c) $0,1$; $E < 10^{-4}$.

3. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 - \frac{10}{243}(x-1)^4 + \frac{22}{729}(x-1)^5$.

c) POLINÔMIOS DE TAYLOR - 2 VARIÁVEIS

1. a) $x + y - 1$

2. a) $1 + x + 5y$; b) $5 + (x-1) + 7(y-1)$; c) $3x + 4y$

3. a) xy ; b) $6 + 8(x-1) + 10(y-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 9(y-1)^2$

6. $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $|E(x, y)| \leq 0,00134$

7. a) $x + xy$

d) MÁXIMOS E MÍNIMOS

1. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos;
d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(4, 4)$ máximo; f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas;
g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ sela, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ mínimos;
i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo;
k) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo.

2. $(0, -1, 2)$.

3. $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$.

4. a) $(a, 0)$ é ponto crítico $\forall a \in \mathbb{R}$. b) $\pm(6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8}), \pm(-6^{-3/8}, \sqrt{2} \cdot 6^{-3/8})$.
6. mínimo $f(0, 0) = 0$; máximo $f(0, \pm 1) = 3e^{-1}$
7. a) $a > 0$; b) $a < 0$; c) não; d) $a = 0$.
9. $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; valor máximo $5e^{-1}$, valor mínimo $-5e^{-1}$.
13. $\sqrt{12}$.
15. a) $\max f(\pm\sqrt{2}/3, \pm\sqrt{2}) = 2/3$; $\min f(\pm\sqrt{2}/3, \mp\sqrt{2}/3) = -2/3$; b) $\max 2/\sqrt{3}$, $\min -2/\sqrt{3}$; c) $\max 1/27$, $\min 0$; d) $\max f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$, $\min f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$; e) $\max \sqrt{3}$, $\min 1$; f) $\max 3/2$, $\min 1/2$.
16. base $3 \times 3\text{cm}$, altura $1,5\text{cm}$.
18. $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$.
19. a) máximo: $f(4, 5) = 13$, mínimo: $f(4, 0) = -7$; b) máximo: $f(0, 0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{2e}$; c) máximo: $f(1, 0) = 2$, mínimo: $f(-1, 0) = -2$; d) máximo: $f(3, -3) = 57$, mínimo: $f(-2, -1) = -7$; e) máximo: $f(2, 0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
20. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
21. $x + y + 2z - 6 = 0$
22. Vértices: $\pm\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \pm\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.
23. Mais próximos $(2 \pm \sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3}, 1)$; mais distante $(2, 2, 4)$.
24. 8°C máxima; não tem mínima.
25. mais próximo: $(1/2, 1/2, 1/2)$; mais distante: $(-1, -1, 2)$.
27. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.
28. b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0,0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0,0)$ é ponto de máximo global.
29. Mais quentes: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$; Mais frios: $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})$.