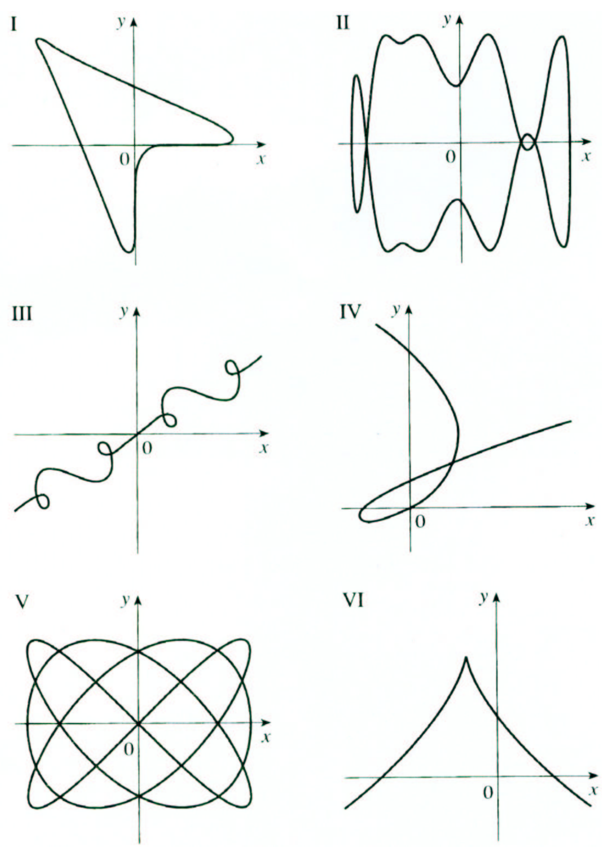
MAT2454 - Cálculo II - POLI

Primeira Lista de Exercícios - 2003

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas:
   (a) $\gamma(t) = (1, t)$ (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + \operatorname{sen} t)$
   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$ (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t), \quad t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.
   (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$ (b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$
   (c) $x = \operatorname{sen}(3t), \quad y = \operatorname{sen}(4t)$ (d) $x = t + \operatorname{sen}(2t), \quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$
   (e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$ (f) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



3. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva abaixo nos quais a tangente é horizontal ou vertical. Esboce a imagem de γ.
   (a) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3))$ (b) $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$
   (c) $\gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$

4. Considere a curva dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right)$$

Determine o domínio de γ. Calcule os limites de $\gamma(t)$ quando t tende a -1 pela direita e pela esquerda, bem como os limites quando $|t|$ tende a infinito. Calcule $\gamma(0)$. Estude $\gamma'(t)$ e, finalmente, faça um esboço da curva.

5. Considere as curvas $\gamma_1(t) = (t^3, t^6)$ e $\gamma_2(t) = (t^3, t^2)$. As imagens dessas curvas são gráficos de funções da forma $y = f(x)$ com f derivável?

6. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t \cdot \cos t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Esboce a curva.

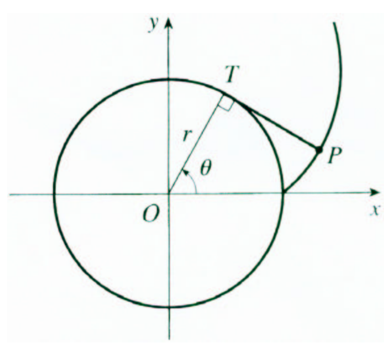
7. Em que ponto ocorre a auto-interseção da curva

$$\gamma(t) = (1 - 2\cos^2 t, \operatorname{tg} t \cdot (1 - 2\cos^2 t)), \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})?$$

   Ache as equações das duas retas tangentes nesse ponto.

8. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



9. Seja $\gamma : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ (ou $\gamma : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$) uma curva diferenciável. Mostre que se $||\gamma(t)|| = C$ para todo $t \in I$ então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

10. (a) Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, onde x' e y' são contínuas. Como se pode definir o comprimento de γ?
    (b) Usando a definição dada em (a), calcule o comprimento de:
    $\gamma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3), \quad t \in [-4, 4]$;
    $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t), \; 0 \le t \le \pi$;
    $\gamma_3(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t\cos t), \; t \in [0, \pi]$.

11. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \text{arctg } \dfrac{y}{x}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y^z}$

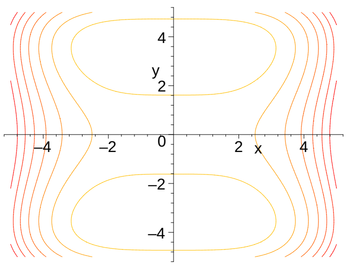
(e) $f(x,y) = \text{tg } (x-y)$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

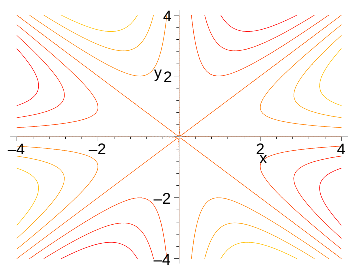
(g) $f(x,y,z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

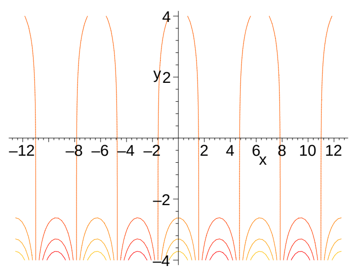
12. Esboce uma família de curvas de nível de:

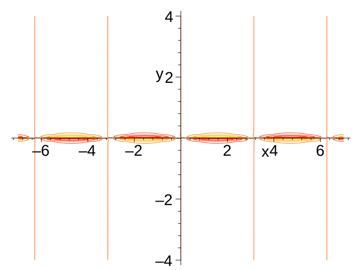
(a)$f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b)$f(x,y) = \text{sen}\, xy$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

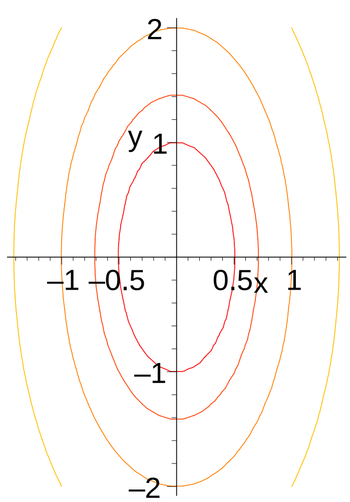
13. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

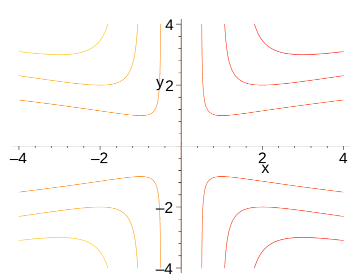
(I)


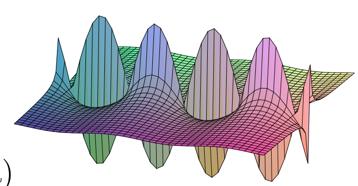
(II)


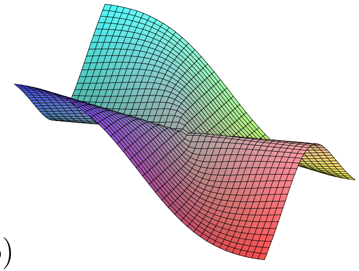
(III)


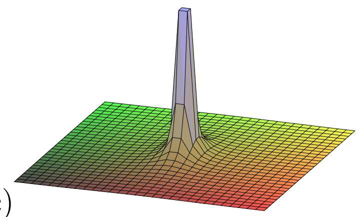
(IV)


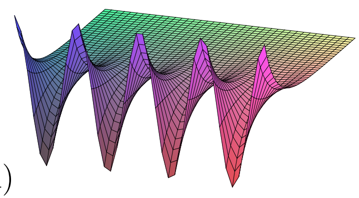
(V)


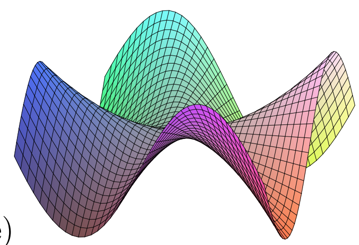
(VI)


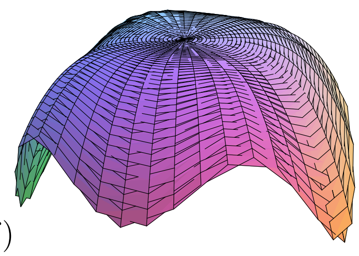
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

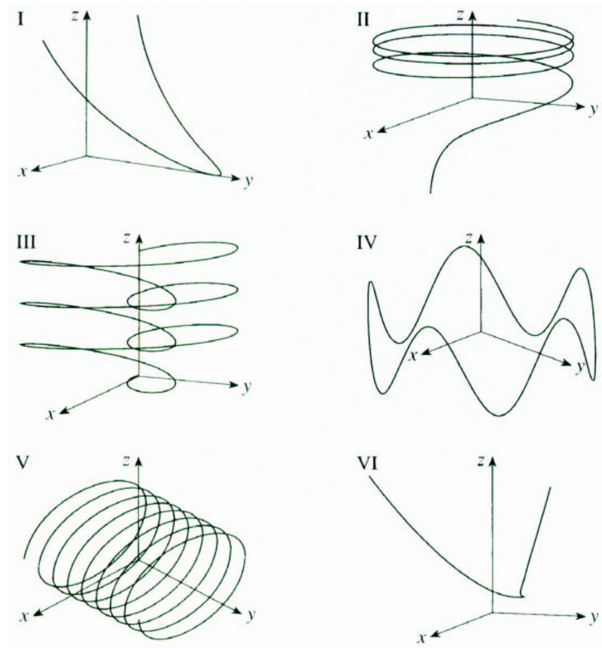
(f) 

14. Esboce os gráficos de:
    (a) $f(x, y) = 1 - x - y$ (b) $f(x, y) = x$ (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
    (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (e) $f(x, y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x, y) = y^2$
    (g) $f(x, y) = y^2 + x$ (h) $f(x, y) = xy$ (i) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$
    (j) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

15. Descreva as superfícies de nível de:
    (a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
    (c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

16. Desenhe as imagens das seguintes curvas:
    (a) $\gamma(t) = (1, t, 1),\ t \in \mathbf{R}$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
    (c) $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$
    (e) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$
    (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

17. Combine as equações com os gráficos. Justifique a sua escolha:
    (a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
    (c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, t)$
    (e) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



18. Classifique a quádrica abaixo em função dos possíveis valores de k e faça um esboço:

$$x^2 + y^2 - z^2 = k$$

19. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ e o plano $y = 2$ têm como intersecção uma elipse. Ache a equação da reta tangente a esta elipse no ponto (1,2,2).

20. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano $x = z$ com o parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

21. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com a superfície $y = z^2$. Tente esboçar essa curva (use o computador).

22. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$.
(a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.
(b) Faça um esboço da imagem de γ.

23. Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

24. Seja $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$.
(a) Esboce as curvas de nível e o gráfico de f.
(b) O gráfico de f e o plano $z = 2x+1$ têm como intersecção uma curva. Parametrize-a.

25. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\operatorname{sen} t, t), t \in \mathbf{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

26. Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.

27. O parabolóide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ e o plano $x = 1$ têm como intersecção uma parábola. Ache a equação da reta tangente a essa parábola no ponto (1,2,-4). Ache a intersecção dessa reta com o plano xy. Use um computador para visualizar, na mesma tela, os gráficos do parabolóide, da parábola e da reta tangente.

28. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ uma curva de classe $\mathcal{C}^2$, parametrizada pelo comprimento de arco e seja $\theta(s)$ o ângulo que o vetor tangente $T(s)$ faz com o eixo das abscissas. Mostre que a curvatura de γ é $\kappa = |\theta'(s)|$. Interprete geometricamente o resultado.

29. Achar o Triedro de Frenet da curva dada pelas equações

$$x = u, \quad y = u, \quad z = u^2 \quad (u \in \mathbf{R})$$

para $u = 1$. Calcule também a curvatura e a torção neste ponto.

30. Achar o Triedro de Frenet para a hélice

$$x = R\cos u, \quad y = R\operatorname{sen} u, \quad z = bu \quad (u \in \mathbf{R})$$

Calcule a curvatura e a torção em $u = 0$.

31. Seja γ uma curva de classe $\mathcal{C}^3$, parametrizada pelo comprimento de arco, e considere a curva $\tilde{\gamma}$. Como você compara o Triedro de Frenet, a curvatura e a torção de γ respectivamente com o Triedro de Frenet, a curvatura e a torção de $\tilde{\gamma}$, nos seguintes casos:

   (a) $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-s)$

   (b) $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + \mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é um vetor constante

   (c) $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ e $\tilde{\gamma}(s) = (-y(s), x(s), z(s))$

   (d) $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ e $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s), -z(s))$

   Interprete os resultados obtidos.

32. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{xy}{x^3-y}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^4\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\text{sen}\,\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(j) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

33. Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique: Sejam $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ e $\gamma(t)=(t,t)$. Como $\lim_{t\longrightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$, então

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0.$$

34. Use um computador para esboçar o gráfico da função $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ e calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

35. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Mostre que f é contínua em (0,0).

==

RESPOSTAS

3. a) Hor.: $t=0$; Vert.: $t=\pm1$; b) Hor.: $t=\pm1$; Vert.: $t=0$ ou $t=2$; c) Hor.: $t=\pm1$; Vert.: $t=0$ ou $t=-\frac{1}{2}$ ou $t=2$.

6. $y=x$ e $y=-x$

7. (0,0); $y=x$ e $y=-x$.

10. a) $L(\gamma)=\int_a^b ||\gamma'(t)||dt$ b) $L(\gamma_1)=64\sqrt{5}$; $L(\gamma_2)=2\sqrt{2}$; $L(\gamma_3)=\frac{\pi^2}{2}$.

11. a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | y\leq x\}$ b) $D_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x\neq 0\}$ c) $D_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+y^2>1\}$ d) $D_f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 | y>0\}$ e) $D_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | y\neq x+\frac{1+2k}{2}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ f) $D_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x(y-x)(y+x)>0\}$ g) $D_f=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 | x^2+y^2+\frac{z^2}{4}<4\}$

15. a) família de planos paralelos; b) família de elipsóides com centro em $(0,0,0)$; c) família de hiperbolóides de uma ou duas folhas; d) família de cilindros hiperbólicos.

19. $X=(1,2,2)+\lambda(1,0,-2),\ \lambda\in\mathbf{R}$

20. $\gamma(t)=(\,\frac{1}{2}(1+\cos t), \frac{1}{2}\text{sen}\,t, \frac{1}{2}(1+\cos t)\,),\ t\in[0,2\pi]$

21. $\gamma(t) = (2\text{sen}\, t\ \sqrt{1+\cos^2 t}\ , 2\cos^2 t\ , \sqrt{2}\cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

22. $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, -\cos 2t),\ t \in [0, 2\pi]$

23. (b) $\gamma(t) = (\dfrac{t^2-1}{4}, t, \dfrac{t^2+1}{2}),\ t \in \mathbf{R}$

26. $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\text{sen}\, t - 1, \text{sen}\, t - 1),\ t \in [0, 2\pi]$

27. $X = (1, 2, 4) + \lambda(0, 1, -8),\ \lambda \in \mathbf{R};\quad (1, \frac{3}{2}, 0)$

29. $T(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2); N(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1); B(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$

30. $T(u) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+b^2}}(-\text{sen}\, u, \cos u, \dfrac{b}{R}); N(u) = (-\cos u, -\text{sen}\, u, 0);$
$B(u) = \dfrac{b}{\sqrt{R^2+b^2}}(\text{sen}\, u, -\cos u, \dfrac{R}{b})$

32. (a) não existe (b) não existe (c) não existe (d) 0
(f) (0) (g) 0 (h) não existe (i) 0 (j) não existe

34. 1