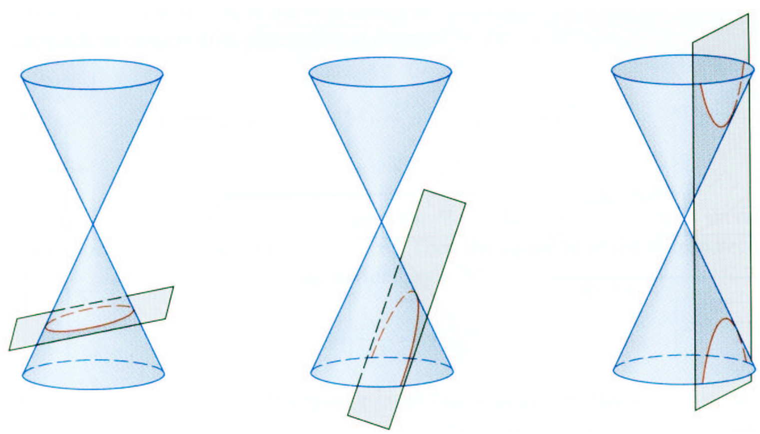
MAT2454 - Poli - 2003
Roteiro de Estudos sobre as Cônicas

Martha Salerno Monteiro
Departamento de Matemática
IME-USP

Uma *equação quadrática em duas variáveis* é uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b ou c é não nulo[1]. Os gráficos de tais equações são *curvas planas*, chamadas *seções cônicas* (ou simplesmente cônicas), pois as possíveis interseções de um cone (duplo) com um plano sco curvas que podem ser descritas por equações quadráticas.



As elipses, hipérboles e parábolas são chamadas *cônicas não-degeneradas*. A interseção de um cone com um plano também pode resultar em um ponto, numa reta, ou ainda num par de retas. Essas são chamadas *cônicas degeneradas*. As definições geométricas de parábola, elipse e hipérbole, suas propriedades e aplicações podem ser encontradas em livros de geometria analítica. Há também um bom resumo na seção 6 do Capítulo 10 do livro Cálculo - vol.II, de James Stewart. Deste livro, recomendamos os exercícios 45, 53 e 54 como exemplos de aplicações.

A seguir apresentaremos uma breve análise das equações reduzidas das cônicas não degeneradas[2].

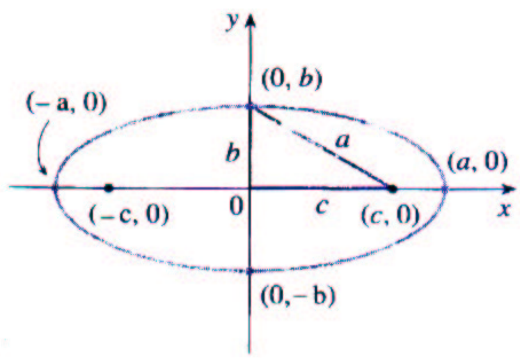
Elipse A equação reduzida de uma elipse é uma equação quadrática da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[1]Alguns autores preferem escrever a frase "onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$" no lugar de "onde pelo menos um dos coeficientes a, b ou c é não nulo". Convença-se de que essas duas frases são, de fato, equivalentes!

[2]O estudo completo de equações quadráticas será feito no curso de álgebra linear.

onde a e b são constantes positivas. Trata-se de uma curva simétrica em relação a cada um dos eixos coordenados, já que, se o par (x, y) satisfaz a equação, então, os pares $(-x, y)$, $(-x, -y)$ e $(x, -y)$ também satisfazem. Assim, para desenhá-la, basta que façamos o gráfico no primeiro quadrante, e completando por simetria. Esse gráfico pode ser feito com a ajuda das ferramentas estudadas no curso de Cálculo 1. (Faça como exercício.) Note que a elipse intercepta os eixos coordenados nos pontos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ e $(0, -b)$.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole Uma equação quadrática da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0,\, b > 0)$$

é uma equação reduzida de hipérbole. Seu gráfico é uma curva simétrica em relação a ambos os eixos coordenados. (Por quê?) Note que $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são as interseções com o eixo x e que não há interseção com o eixo y - por quê? Escrevendo a equação na forma $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$ podemos ver que $x^2 \geq a^2$ e, portanto, $x \leq -a$ ou $x \geq a$. Com isso concluímos que o gráfico da hipérbole consiste de duas partes, chamados *dois ramos*. Além disso, também podemos escrever

$$y^2 = b^2 \, (\frac{x^2}{a^2} - 1) = \frac{b^2}{a^2} \, (x^2 - a^2).$$

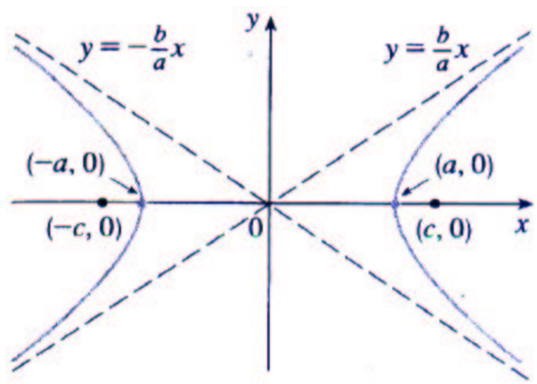
Para $y \geq 0$, escrevemos $y = \dfrac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ e vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} (\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0$$

Com o cálculo dos limites acima e a simetria em relação ao eixo x, podemos concluir que as retas $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$ são assíntotas da hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



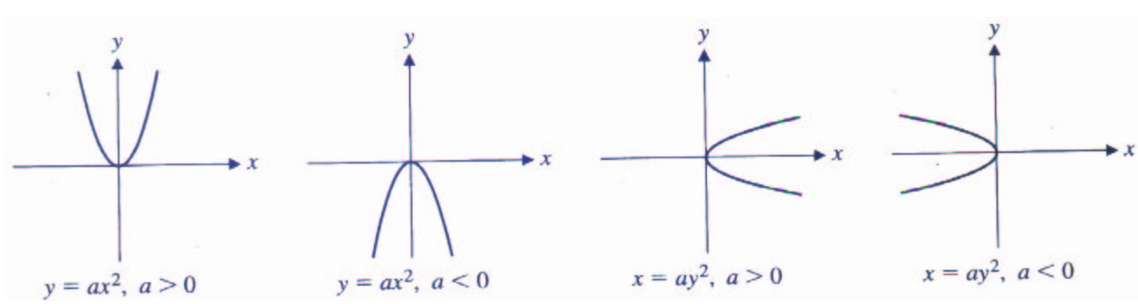
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Você está convidado a estudar a hipérbole de equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

achando interseções com os eixos coordenados e provando que as retas $y=\pm\frac{b}{a}x$ são suas assíntotas.

Parábola Há quatro tipos de equação reduzida de parábola. A figura abaixo ilustra cada tipo e seu respectivo gráfico.



Os gregos antigos estudaram as várias propriedades geométricas das cônicas não-degeneradas. Apenas séculos depois, percebeu-se a utilidade prática desse conhecimento, que hoje contribui fortemente em muitos avanços tecnológicos, tais como construção de telescópios, sistemas de navegação, radares, antenas, e outros sistemas de informação à distância.

Vejamos alguns exemplos de equações de cônicas na forma reduzida:

Exemplo 1. A equação $25x^2 + 16y^2 = 400$ pode ser escrita na forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

e. portanto, seu gráfico é a *elipse* que intercepta os eixos coordenados nos pontos $(4, 0), (-4, 0), (0, 5), (0, -5)$. Verifique as afirmações acima e esboce o gráfico.

Exemplo 2. A equação $25x^2 - 16y^2 + 1 = 0$ pode ser escrita como

$$-\frac{x^2}{\frac{1}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

Portanto, seu gráfico é uma *hipérbole*. Para fazermos um gráfico razoável, começamos pelas assíntotas, que são as retas de equações $y = \pm\frac{5}{4}x$. A hipérbole intercepta o eixo y nos pontos $(0, \pm\frac{1}{4})$ e não intercepta o eixo x. Verifique as afirmações e esboce o gráfico.

Exemplo 3. A equação $4y^2 - 9x = 0$ pode ser escrita como

$$x = \frac{4}{9}y^2$$

e, por isso, concluímos que trata-se de uma *parábola* voltada para a direita.

Se uma equação quadrática não for equivalente a nenhuma das formas reduzidas é possível que se trate de uma cônica que não esteja na posição padrão, isto é, que não esteja centrada na origem e com eixo(s) de simetria coincidente(s) com os eixos coordenados. Vejamos alguns exemplos simples de casos assim.

Exemplo 4. A equação $4x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 6 = 0$ é uma equação quadrática, que não está na forma reduzida. Mas pode ser re-escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (4x^2 + 8x) + (2y^2 - 12y) = &\quad -6 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) + 2(y^2 - 6y) = &\quad -6 \end{aligned}$$

Completando os quadrados das expressões entre parênteses obtemos:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 6y + 9) = &\quad -6 + 4 + 18 \\ \Leftrightarrow 4(x+1)^2 + 2(y-3)^2 = &\quad 16. \end{aligned}$$

Fazendo $u = x + 1$ e $v = y - 3$ obtemos $4u^2 + 2v^2 = 16$ ou, equivalentemente,

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{8} = 1$$

Esta é a equação de uma elipse que, no sistema de coordenadas $O'uv$ intercepta o eixo u nos pontos $(\pm 2, 0)$ e o eixo v em $(0, \pm 2\sqrt{2})$. A origem O' do sistema $O'uv$ coincide com o ponto de coordenadas $x = -1$ e $y = 3$.

Quando a equação quadrática contém um termo em xy ela representa uma cônica cujos eixos de simetria não são paralelos aos eixos x e y. Como achar os eixos de simetria da figura será um assunto a ser estudado em Álgebra Linear. Por enquanto veremos apenas o importante exemplo a seguir.

Exemplo 5. A equação $xy = 1$ é uma equação quadrática em x e y. Isolando o y na equação, podemos perceber que o gráfico da equação dada é o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}, (x \neq 0)$ já vista no primeiro semestre. Vamos estudá-lo agora sob outro ponto de vista.

A mudança de variáveis dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

representa uma rotação de θ no sistema de coordenadas.

No nosso caso, iremos fazer a mudança

$$\begin{cases} x = & \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ \\ y = & \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases}$$

(que corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos.) Com isso, obtemos o sistema de coordenadas $0uv$, em que o eixo u coincide com a reta de equação $y = x$ do sistema antigo, e o eixo v coincide com a reta $y = -x$.

Substituindo x e y na equação original, temos:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v)(\frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v) = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$$

Logo, o conjunto dos pontos que satisfaz a equação $xy = 1$ é o mesmo que o conjunto de pontos que, no sistema $0uv$, satisfaz a equação da hipérbole $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$, que intercepta o eixo u em $(u_1, v_1) = (\sqrt{2}, 0)$ e $(u_2, v_2) = (-\sqrt{2}, 0)$. (Esses são os pontos $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (-1, -1)$.) Também é fácil verificar que as assíntotas são as retas $v = u$ e $v = -u$, correspondentes a $y = 0$ e $x = 0$.

A seguir mostraremos exemplos de cônicas degeneradas.

Exemplo 6. A equação $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$ pode ser escrita, de modo equivalente, na forma:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, vemos que o conjunto dos pontos que satisfaz a equação original é o conjunto dos pontos que satisfaz a equação $x + y - 1 = 0$, ou seja, é uma reta.

Exemplo 7. A equação $x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 2 = 0$ é equivalente a

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + (x+y) - 2 = 0 &\Leftrightarrow [(x+y)-1][(x+y)+2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y+2) = 0 \end{aligned}$$

Se um ponto P, de coordenadas (x, y) satisfaz a equação dada, então as coordenadas de P ou satisfazem a equação $x + y - 1 = 0$ ou satisfazem a equação $x + y + 2 = 0$. Logo, o conjunto solução da equação dada é a reunião de duas retas paralelas. Note que este exemplo mostra que nem toda equação quadrática representa a interseção de um cone com um plano.

Exemplo 8. A equação $x^2 - 4y^2 = 0$ é equivalente a $(x + 2y)(x - 2y) = 0$. Logo, a equação quadrática dada representa um par de retas concorrentes.

Exemplo 9. A equação $3x^2 + 47y^2 = 0$ equivale a $x = y = 0$ e, portanto, representa o ponto $P = (0, 0)$.

Exercícios

1. Represente graficamente o conjunto dos pontos que satisfaz:

   (a) $25x^2 + 9y^2 = 225$

   (b) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

   (c) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

   (d) $4y^2 - x^2 = 4$

   (e) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 90y = 305$

2. Classifique a cônica em função dos valores de k dados:

   (a) $9x^2 + 16y^2 = k$ para $k = 0, k = 1, k = 9, k = 144$

   (b) $x^2 + ky^2 = 1$ para $k = 0, k = 1, k = 4, k = -1, k = -4$

   (c) $xy = k$ para $k = 0, k = 1, k = 4, k = -1, k = -4$

   (d) $\dfrac{x^2}{k} + \dfrac{y^2}{k-25} = 1$ para $k > 25, 0 < k < 25, k < 0$