2ª LISTA DE MAT 2454 - CÁLCULO II - POLI
2º semestre de 2003

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções :

(a) $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$

(b) $f(x, y, z, t) = \frac{x - y}{z - t}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

(a) $u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

(b) $u(x, y) = f(ax + by)$, a e b são constantes.

3. Dada a função $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\text{sen}(x^2 y)}$, ache $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$. (Dica: dá menos trabalho usar a definição de derivada parcial como limite do que aplicar as regras de derivação .)

4. Verifique que a função $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Verifique que a função $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é solução da equação de Laplace tridimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

(a) Mostre que $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(b) Mostre que $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

7. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) É f contínua em $(0, 0)$?

(c) É f diferenciável em $(0, 0)$?

8. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) É f diferenciável em $(0, 0)$?

(d) São $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0, 0)$?

9. Considere $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$

(b) São contínuas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(0, 0)$?

10. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ para todo y , e que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, para todo x .

(b) Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ e que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

11. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = (x^2 y, y^2) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

12. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

a) $w = x^2 + y^2$; $x = t^2 + u^2$, $y = 2tu$.

b) $w = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $x = t \cos u$, $y = t \sin u$.

c) $w = x^2 + y^2 + z$; $x = tu$, $y = t + u$, $z = t^2 + u^2$.

13. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

14. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da interseção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da interseção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

15. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$ e $g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t)$. Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

16. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$. As derivadas parciais de f nos pontos da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ são: $\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) = \cos t$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) = \sin t$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) = t^2 + t - 2$. Para $t \in [-\pi, 2\pi]$, em quais pontos da hélice f pode atingir seu máximo? E seu mínimo?

17. a) Sendo $v(r, s)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, defina $u(x, t) = v(x + ct, x - ct)$, onde c é constante. Verifique que

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = w(x + ct, x - ct),$$

onde $w(r, s) = -4c^2 v_{rs}(r, s)$.

b) Mostre que todas as soluções da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ são da forma $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$, onde F e G são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

18. Sendo $u(x, y)$ função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, defina $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Verifique que $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \Delta u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, onde, por definição, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

19. a) Sendo $u(x, y, z)$ função de classe C^2 , defina $v(r, \theta, \varphi) = u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. Verifique que $Lv = \Delta u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$, onde, por definição,

$$Lv = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] \text{ e } \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

b) Dada a função de uma variável $f(r)$, de classe C^2 , mostre que $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ é harmônica (i.e. satisfaz $\Delta u = 0$) se, e somente se, $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$.

20. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau λ se satisfaz

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y) \quad (*)$$

para todo $t > 0$, onde λ é um número real fixado. Suponha que f é uma função de classe C^2 que é homogênea de grau λ . Prove que:

a) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$;

b) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lambda(\lambda - 1)f(x, y)$;

c) as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são homogêneas de grau $\lambda - 1$.

d) Verifique que as funções abaixo são homogêneas e determine o grau:

i) $f(x, y) = 5x^2 + 2xy - y^2$ ii) $f(x, y) = \frac{xe^{x/y}}{x^2 + y^2}$

iii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}}$.

Dicas: a) derive (*) em relação a t e faça $t = 1$; b) derive (*) duas vezes em relação a t e faça $t = 1$; c) derive (*) em relação a x e em relação a y .

21. a) Suponha que a equação $F(x, y, z) = k$ (k constante) define implicitamente cada uma das variáveis x , y e z como função das outras: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F diferenciável e se F_x , F_y e F_z são não-nulas, mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$.

b) Verifique por meio de um cálculo direto a equação acima para os casos particulares:

(i) $ax + by + cz = d$, a, b e c não-nulos;

(ii) $PV = kT$, k constante, P, V e T positivos;

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (x, y, z) no primeiro octante.

22. Seja $F(r, s) = G(e^{rs}, r^3 \cos(s))$, onde G é uma função de classe C^2 .

(a) Calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, s)$ em função das derivadas parciais de G .

(b) Determine $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1, 0)$ sabendo que $\frac{\partial G}{\partial y}(t^2 + 1, t + 1) = t^2 - 2t + 3$.

23. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

- a) $z = e^{x^2+y^2}$ (0,0,1)
 b) $z = \ln(2x + y)$ (-1,3,0)
 c) $z = x^2 - y^2$ (-3,-2,5)
 d) $z = e^x \ln y$ (3,1,0)

24. Determine o plano que passa por (1,1,2) e (-1,1,1) e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$. Existe mesmo só um?

25. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 8$ no ponto (2,1). Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

26. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para um determinado ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação

$$-2x + 2y - z + 3 = 0$$

Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser a curva de nível de f que contém o ponto P :

- a) $\gamma(t) = (-1/t, t)$ b) $\gamma(t) = \left(\frac{t^5}{5}, \frac{-2t^3}{3} + 3t \right)$
 c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$

27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$. Seja

$$g(u, v) = u f(\text{sen}(u^2 - v^3), 2u^2v).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1))$ seja perpendicular ao plano $4x + 2y + az + 9 = 0$.

28. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos (3,-1,0) e (5,3,6).

29. a) Mostre que toda reta normal a uma esfera passa pelo seu centro.

b) Mostre que o plano tangente à superfície $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$ no ponto (x_0, y_0, z_0) tem como equação $ax_0x + by_0y + cz_0z = d$.

c) Mostre que todos os planos tangentes ao cone $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ passam pela origem.

30. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

31. Determine um plano tangente à superfície $xyz = a$ ($a \neq 0$) e que seja paralelo ao plano $x + y + z + 100 = 0$

32. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.
33. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).
34. Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.
35. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1,1,2)$.
(Sugestão: Use vetores normais.)
36. Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com o gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.
37. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$. para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.
38. O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Ache a equação da reta tangente à elipse no ponto $(1,2,1)$. Use computador para visualizar simultaneamente o cilindro, o plano e a reta tangente.
39. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 - (z - 1)^2 = 0$ nos pontos $(2,2,2)$ e $(2,2,0)$.
40. Sejam $F(x, y) = xe^x - y^2$ e $G(x, y) = ye^y + x^2$. Mostre que em qualquer ponto $(t, t) \in \mathbb{R}^2$ a curva de nível de F contendo (t, t) é ortogonal no ponto (t, t) à curva de nível de G contendo (t, t) .
41. São dados o cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ e a família de esferas $x^2 + y^2 + (z - 2\alpha)^2 = \alpha^2$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
- a) Esboce o cone e algumas esferas da família.
- b) Mostre que essas superfícies são tangentes em seus pontos de intersecção, isto é, elas têm o mesmo plano tangente nesses pontos.

RESPOSTAS

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) = \frac{1}{z - t}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z, t) = \frac{1}{t - z}; \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{y - x}{(z - t)^2}; \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = \frac{x - y}{(z - t)^2}$
2. a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{y^2} f' \left(\frac{x}{y} \right)$
 b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = a f'(ax + by); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = b f'(ax + by)$
3. -2
7. (b) Não é contínua em (0,0).
 (c) Não é diferenciável em (0,0).
8. b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$
 c) não é diferenciável em (0,0).
 d) nenhuma das derivadas parciais é contínua em (0,0).
9. b) nenhuma das derivadas parciais é contínua em (0,0).
13. $-9600\pi cm^3/s$;
14. distanciando-se a uma taxa de 10km/h.
15. $a = 3$.
16. $\max \gamma(-1) = (\cos(-1), \text{sen}(-1), -1)$ ou $\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$, $\min \gamma(-\pi) = (-1, 0, -\pi)$ ou $\gamma(2) = (\cos 2, \text{sen} 2, 2)$.
20. d) i) grau 2; ii) grau -1; iii) grau $-\frac{3}{2}$.
22. a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s \cos s \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs} \frac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \frac{\partial G}{\partial y}$;
 b) 0.
23. (a) $z = 1; X = (0, 0, 1) + \lambda(0, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
 (b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1, 3, 0) + \lambda(2, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
 (c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3, -2, 5) + \lambda(6, -4, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
 (d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3, 1, 0) + \lambda(0, e^3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
24. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um).
25. $\nabla f(2, 1) = (4, 8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.
26. (c).

27. $a = -4$.

28. $\pm \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$;

31. $x + y + z - 3\sqrt[3]{a} = 0$.

35. $(5, 8, 6)$.

36. $x = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

37. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

38. $X = (1, 2, 1) + \lambda(2, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

39. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$.