LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

http://www.ime.usp.br/lem

Esta apostila é parte do material didático do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do IME-USP. O objetivo básico deste laboratório é desenvolver e divulgar material de ensino de matemática que considerem o aluno um "descobridor/desenvolvedor" de matemática.

Torre de Hanói

Leônidas O. Brandão (DCC-IME-USP)

1 Objetivo

Nesta apostila apresentamos um problema-desafio na forma de um jogo e como um professor de Matemática do ciclo médio (antigo segundo grau) pode utilizá-lo com seus alunos. A principal meta nesta atividade é despertar o interesse do aluno pela matemática e desenvolver sua capacidade nesta disciplina. Através deste jogo esperamos que o estudante fique motivado a desvendar a regra de movimentação envolvida no mesmo.

Com esta atividade, além de ser excelente exercício de abstração, o professor poderá explorar com seus alunos, os seguintes tópicos de Matemática: introduzir recorrência, processo de indução e o conceito de otimalidade, além de poder revisar progressões geométricas e função exponencial (faremos uma apresentação resumida dos três primeiros na seção 4).

2 Introdução

O problema que apresentaremos é antigo, *Problema das Torres de Hanói* (vide subseção 3.1), e com ele o professor poderá explorar várias das etapas que podem estar envolvidas na resolução de problemas matemáticos. A partir da exposição do problema, o aluno deverá realizar “observações experimentais”, visando descobrir uma relação (ou fórmula), testá-la e posteriormente, esquematizar um argumento que explique o porquê da fórmula valer. Com isto o aluno trilhará passos essenciais da Matemática: *testes* , *conjecturas* , *contra-exemplos* e *demonstrações* .

Na seção 3 apresentamos o Problema das Torres de Hanói, uma lenda associada ao mesmo e algumas opções de materiais/equipamentos para tornar a atividade mais concreta e atraente.

Na seção 4 apresentamos os conceitos a serem desenvolvidos na atividade para servir de guia ao professor na preparação da mesma.

Na seção 5 apresentamos uma sequência de “dicas”, na forma de perguntas e respostas, que o professor poderá utilizar para ajudar os alunos a avançarem na resolução do problema ou para despertá-los para a necessidade de verificação da validade de determinadas relações (caso contrário são apenas conjecturas).

Na seção 6 apresentamos uma formalização dos conceitos envolvidos, para servir de guia ao professor. Esta formalização será dedutiva e poderá ser utilizada ao final, pelo professor, para uma sistematização dos resultados discutidos na atividade “Problema das Torres de Hanói”.

Na seção 7 efetuaremos algumas contas relacionadas com a lenda associada ao problema e que ilustrará o quão rápido cresce a função exponencial (de base 2).

3 O Problema das Torres de Hanói

O professor poderá encontrar muitas referências ao problema, pois o mesmo é mundialmente conhecido [1] e tem sido utilizado tanto em disciplinas de matemática quanto de computação: o ponto de interesse comum às duas áreas é devido a *recorrência* implicita no problema (vide subseção 4.1). Este jogo também foi utilizado por Jean Piaget para se estudar o desenvovimento cognitivo de crianças entre 5 e 12 anos, conforme descrito em seu livro "A Tomada da Consciência" (Melhoramentos e EDUSP, 1977), capítulo XIV, com a colaboração de A. Cottin.

O professor que tiver acesso à rede mundial de computadores Internet poderá encontrar dezenas de endereços com referências ao problema. Uma destas página WWW (World Wide Web), com muitas informação e "links", é `http://web.archive.org/web/19991012112910/www.pangea.ca/kolar/javascript/Hanoi/HTonWebE.html` [2] . Na s página s do LEM e do LInE é possível encontrar uma implementação desse jogo, desenvovida especialmente para esta atividade (vide subseção 3.3).

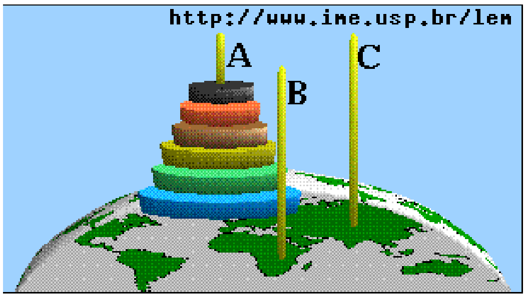
3.1 A Lenda

A Torre de Hanói foi inicialmente proposta pelo matemático francês Édouard Lucas, em 1883. Lucas elaborou para seu "invento" uma lenda curiosa sobre uma torre muito grande, a *Torre de Brama* , que na **Revista do Professor de Matemática** n úmero 9 é assim apresentada: " *Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá à pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará* ".

Admitindo que cada movimento leve exatamente um segundo e que os monges desde o início dos tempos apliquem uma regra de movimentação que use o menor número possível de movimentos (ótima), **devemos nos preocupar com a veracidade da lenda? Quanto tempo nos resta?**

3.2 Descrição

Nesta seção apresentamos a descrição resumida do problema da *Torre de Hanói* . A torre é composta de discos sobrepostos sendo que:



- existem 3 hastes **A, B, C** nas quais são encaixados discos com diâmetros decrescentes (do topo para a base):
  A posição original dos discos;
  B intermediária; e
  C a haste de destino para os discos
- nunca um disco maior pode estar sobre um disco menor; (portanto)
- os discos disponíveis para movimentação são somente aqueles posicionados nos topos das hastes;
- o número de discos, em princípio, é arbitrário (pode variar, desde **0** até $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$).

O objetivo do jogo é transportar os discos, um a um, da haste **A** para a haste **C** , respeitando as restrições anteriores. Mas isto não é tudo, como os monges utilizam uma regra de movimentação que realiza a menor quantidade de movimentos, é esta regra que deve ser descoberta, caso contrário "poderíamos fazer uma

---

[1] Um editor de texto muito popular entre os usuários de Linux e Unix trás embutido uma implementação (gráfica) simples de Hanói. O nome do editor é GNU-Emacs, *software* livre, e o comando deste que dispara a animação (nas versões 19 e 20) é ESC X: hanoi.

[2] A página original de Miroslav Kolar não está mais ativa, por isso o uso do *WayBackMachine*. Vide `www.mkolar.org`.

estimativa errada de quanto tempo nos resta". Este conceito deve ser explicado com cuidado (vide dicas no início da seção 4), utilize algum exemplo simples como: para mover um só disco, de **A** para **C** , qual é a regra *ótima* ?

Regra ótima para **n=1** : move-se o disco de **A** para **C** ;
Regra não ótima: pode-se mover o disco de **A** para **B** e então de **B** para **C.**

Se os alunos não assimilarem o conceito de otimalidade, apresente-lhes alguns dos exemplos da subseção 4.2.

3.3 Material recomendado

Para levar esta atividade à sala de aula, podemos usar desde lousa/giz e lápis/papel ou outras alternativas, como por exemplo, as duas seguintes:

- *Software* : pode-se usar o programa **iHanói** desenvolvido especificamente para esta atividade,

    - Necessita de navegador com interpretador *JavaScript* habilitado.
        - Recomenda-se o uso do navegador *Firefox* ;
        - Pode-se "descarrega-lo" e usá-lo a partir de algum gerenciador de curso, como o Moodle. Nesse caso, se utilizar nosso pacote *iTarefa*, pode-se registar os envios dos alunos e pode-se usar o avaliador automático do *iHanói* .
    - Esta é uma alternativa muito prática e didática, pois além do atrativo visual, este *software* conta o número de movimentos realizados e impede movimentos inválidos.

    Para testar a versão em linha, aponte seu navegador para o URL
    `http://www. matematica .br/ihanoi`
    Para descarregar a área toda do *iHanói* (para ter uma versão completa em seu computador), siga essa URL
    `http://www.matematica.br/ihanoi/ihanoi_modelo_ima.tgz`
    Para descarregar o pacote iTarefa (deve ser instalado como módulo do Moodle), siga essa URL
    `http://www.matematica.br/ia`
    Todos esses programas são desenvolvidos no ***LInE*** [3] (Laboratório de Informática na Educação) do IME-USP, sendo distribuídos na forma de *software* livre (*educação livre, dados privativos*) . Seus códigos podem ser obtidos, por exemplo, a partir da seguinte URL
    `https://github.com/LInE-IME-USP`

- Torre de Hanói em madeira: pode ser encontrado em lojas especializadas em brinquedos pedagógicos (também pode-se improvisar a construção da maquete, por exemplo, em papelão).

4 Desenvolvimento da atividade

Devido à complexidade dos conceitos aqui envolvidos, sugerimos que a atividade seja interativa, de modo que a cada intervalo de (aproximadamente) dez minutos, que denominaremos **rodada de divulgação** , o professor "colete" os resultados/observações obtidos pelos grupos e divulgue ao restante da classe, anotando-os na lousa e eventualmente corrigindo-os se em uma rodada de divulgação posterior os alunos obtiverem resultado diferente.

A essência do que propomos está na participação dos alunos, assim, evite apresentar soluções, apenas indague o que conseguiram ou desejam e eventualmente explique conceitos que eles podem não estar usando ou usando erroneamente, como os indicados nas subseções seguintes. Resumidamente, o roteiro que propomos é:

- O professor deve contar a lenda associada ao problema (subseção 3.1) . A seguir deve definir claramente o jogo (subseção 3.2). Divida, então, a sala em grupos de 3 ou 4 alunos e dê início à atividade (vide dicas na seção 5);
- Inicialmente os alunos devem ficar livres para experimentar o jogo, se familiarizarem com os movimentos;

[3] Páginas do LInE: `www.usp.br/line` ou `line.ime.usp.br`

- Ao perceber que um grupo está iniciando a atividade a partir de 5 discos, por exemplo, indagar se eles já sabem como fazer para 1, 2 ou 3 discos: “para se estabelecer um padrão é recomendável começar com instâncias menores”.

4.1 Recorrência

Dizemos que uma função f é ***recorrente*** ou ***recursiva*** se em sua definição, a própria função aparece do lado direito. Exemplos:

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $f(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n + f(n-1), & n>0 \end{cases}$

Abrindo a recorrência, para n grande, $f(n) = n+f(n-1) = n+(n-1)+f(n-2) =$
$= n+(n-1)+(n-2)+f(n-3) = ... =$
$= n+(n-1)+(n-2)+...+2+1 = n(n+1)/2$

Ou seja, a função acima é uma P.A. e assume a *forma fechada* , $f(n) = n+f(n-1) = n(n+1)/2$.

(2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $f(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ n \times f(n-1), & n>0 \end{cases}$

Esta é a função ***fatorial***, usualmente apresenta na forma: $f(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 = n!$, note que por definição o fatorial de 0 é 1, isto é, $0!=1$.

4.2 Mínimo

Um valor x é mínimo em um conjunto S se não existe y em S que seja menor que x. Assim, para aplicar esse conceito é necessário saber comparar valores ($x \leq y$, $x<y$, $x=y$), ou mais formalmente, deve existir uma **ordem** (*completa* ou *total* em Álgebra) entre os elementos de S .

Exemplo 3: No caso de **funções reais** f , seja

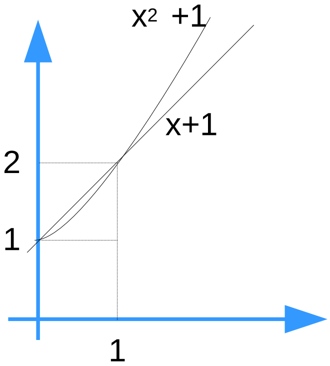
$S = \{y \in \mathbb{R} :$ existe $x \in \mathbb{R}$, para o qual $f(x)=y\} =$ **Imagem** de $\mathbb{R}$ por f.

Assim, para as particulares funções abaixo, considerando como domínio toda reta real $\mathbb{R}$

(i) $f(x)=x+1$ (vide fig. 1)
(ii) $f(x)=x^2 +1$ (vide fig. 1)
(iii) $f(x)=(x-1)^2 (x+1)^2$
(iv) $f(x)=x^3$

os mínimos são:

(i) $\emptyset$ (vazio), não tem mínimo em $\mathbb{R}$, pois, dado qualquer x, f(x-1)<f(x).
(ii) $\{x \in \mathbb{R} : x=0\}$;
(iii) $\{x \in \mathbb{R} : x=1$ ou $x=-1\}$;
(iv) $\emptyset$ (vazio, não tem mínimo em $\mathbb{R}$).



x	x+1	x^2+1
0.0	1.00	1.00
0.2	1.20	1.04
0.4	1.40	1.16
0.6	1.60	1.36
0.8	1.80	1.64
1.0	2.00	2.00
1.2	2.20	2.44
1.4	2.40	2.96
1.6	2.60	3.56
1.8	2.80	4.24

Fig. 1. Gráficos e tabela de valores para funções $x+1$ e $x^2 +1$.

4.3 Conjecturas, Contra-Exemplos e Demonstrações

A seguir apresentaremos uma definição extremamente simplista para três conceitos chaves em Matemática:

Conjectura: Uma conjectura é uma relação que se supõe válida, mas que ainda não foi *demonstrada* e nem foi possível apresentar um exemplo no qual fosse inválida (*contra-exemplo*).

Contra-exemplo: Um contra-exemplo é basicamente um exemplo para o qual alguma afirmação (*conjectura*) é inválida (portanto a conjectura é falsa).

Demonstração: Conjunto formal de resultados matemáticos utilizados para comprovar a validade de algum resultado (vide um exemplo de demonstração usando a técnica de Indução Finita a seguir).

Exemplo 4:

(1) Conjectura 1: $x = -100$ é mínimo da função $f(x) = x^3$;
(2) Conjectura 2: $x = 1$ é mínimo da função $f(x) = (x-1)^2$;
(3) Contra-exemplo: é falsa a conjectura 1, pois $z = -101$ é tal que $f(z)<f(-100)$, logo -100 não é mínimo (ou seja, $z = -101$ é um contra-exemplo para a afirmação "-100 é mínimo para a função f(.)).

(4) Demonstração: $f(x) = (x-1)^2 \geq 0 = f(1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo não existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z)<f(1)$, assim, da definição de mínimo, $x = 1$ é mínimo de f.

4.4 Indução (PIF)

O conceito de *Indução* (ou *Processo de Indução Finita*, PIF), está fortemente relacionado com o conjunto dos números naturais e sua grande utilidade na Matemática é como uma poderosa técnica de demonstração, aplicável "sempre" que uma tese T (a ser demonstrada) puder ser indexada pelos naturais ($T(n)$). Estas demonstrações são baseadas no seguinte teorema,

Teorema PIF: Para $S=\{n \in \mathbb{N} : T(n) \text{ vale}\}$, se valem as seguintes hipóteses

(BASE) $T(n)$ vale para o primeiro natural (i.e., vale $T(1)$) (esta é a **base** da indução);

(PASSO) para qualquer $n \geq p$, se vale $T(n)$ então vale $T(n+1)$ (a **hipótese da indução**, H.I.,é $T(n)$ valer).

então $S= \mathbb{N}$.

Por razões de espaço não apresentaremos a demonstração deste teorema[4], mas pode ser encontrada em qualquer texto introdutório de Álgebra, mas a intuição de porque tal teorema é correto não é complicada :

$$\underset{\text{(BASE)}}{1 \in S} \underset{\text{(PASSO)}}{\Rightarrow} 2 \in S \underset{\text{(PASSO)}}{\Rightarrow} 3 \in S \underset{\text{(PASSO)}}{\Rightarrow} \cdots \qquad \text{(PI)}$$

Usando o teorema acima, podemos demonstrar vários outros teoremas (cuja tese seja indexada pelos naturais) apenas provando que as hipóteses do PIF se aplicam ao caso em estudo, adotando o seguinte esquema:

Teorema EX: (A tese que desejamos demonstrar é) $T(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja S o conjunto de pontos de $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(n)$ vale, ou seja, $S=\{n \in \mathbb{N} : T(n) \text{ vale}\}$.
Assim, devemos mostrar que $S= \mathbb{N}$. Faremos isto mostrando que valem as hipóteses do teorema PIF : vale a (BASE) o primeiro natural está em S; e vale o (PASSO) , em geral a parte mais difícil de uma demonstração por indução, se o natural $n \in S$, então $n+1 \in S$.
E uma vez que valem as hipótese do teorema PIF , basta aplicar o mesmo para concluirmos a tese. ■

Observe que provar a validade da tese apenas para a base é inútil, já que seria impossível montar o esquema (PI) indicado algumas linhas acima. Do mesmo modo, provar apenas a validade do passo também não é suficiente, pois precisamos de um ponto inicial para montar o esquema.

Observação: A insuficiência do passo pode não convencer os alunos, neste caso uma brincadeira pode ajudar: se o (PASSO) fosse suficiente (dispensando portanto a BASE) seria possível demonstrar que todos os alunos da sala têem o mesmo sexo! Veja se consegue construir esta brincadeira.

Exemplo 5: Para $n \in \mathbb{N}$, seja F a função definida por $F(n)=1+2+3+...+(n-1)+n$, ou seja, $F(n) = \sum_{i=1}^{n} i$.
Desejamos provar que $F(n)=n(n+1)/2$, para todo natural n, ou seja, a tese $T(n)$ é:

$$F(n)=n(n+1)/2.$$

Para demonstrarmos o resultado desejado utilizaremos o esquema indicado acima, na teorema EX acima.
(BASE) : $T(0)$ (ou $T(1)$) vale, pois $T(0)=0$ e $F(0)=0 \times (0+1)/2=0$.

(PASSO) : Se $T(n)$ vale, isto é, $F(n)=n(n+1)/2$, então da definição de $F(.)$, $F(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$, segue que

$$F(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+(n+1) = F(n)+(n+1) \overset{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

[4] Esta demonstração pode ser feita usando o princípio do terceiro excluido, por contradição, usando o fato de todo conjunto de naturais ter mínimo.

Assim, como valem a base e o passo da indução, pode-se aplicar o teorema PIF, concluindo-se que $F(n)=n(n+1)/2$ para todo natural n . ■

Na seção seguinte, são exploradas ideias para direcionar o aluno para que ele próprio "faça" matemática.

5 Começando a fazer Matemática

5.1 Para quais valores de n conhece o número de movimentos?

Para as tentativas com poucos discos (n =1, 2 e 3) os números mínimos de movimentos serão facilmente determinados, o professor pode colocar na lousa uma tabela, que denominaremos por *tabela de movimentos* , com os mínimos alcançados. É claro que esta tabela poderá conter erros no início, mas logo os alunos tentarão "abaixar o recorde", conseguir mover, digamos n discos, com menos movimentos do que o indicado na tabela. Talvez algum grupo, utilizando um processo de contagem mais sistemático, consiga por exemplo, até 6. A tabela poderia ter o seguinte formato:

NÚMEROS DE DISCOS	$\mathbf{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7
NÚMEROS DE MOVIMENTOS	$\mathbf{m_n}$	0	1	3	7	15	31	63	127

Se os alunos conseguirem montar esta tabela corretamente até 5 já estará bom, pois a movimentação de 5 ou mais discos é muito complicada. Se eles não se convencerem da dificuldade, o professor chamar a atenção para o fato de nenhum grupo ter certeza do número mínimo de movimentos para $\mathbf{n}$ =6 (ou 7) e que, a partir dos 6 (ou 7) primeiros valores da tabela é possível supor que o número de movimentos para $\mathbf{n}$ =7 (8) discos é grande, ao menos **bem maior** que $\mathbf{m_5}$ =31 (ou $\mathbf{m_6}$ =63).

5.2 Qual a relação entre m_n e n ?

Uma vez contruída a tabela de movimentos para 7 ou 8 naturais, é tempo de responder a pergunta principal:

qual a relação entre $\mathbf{m_n}$ *e* $\mathbf{n}$ *?*

Deste modo, o professor deve fazê-los se concentrar nos resultados que já conhecem e a partir destes tentar encontrar uma fórmula que, ao menos, reproduz a sequência $\mathbf{m_n}$ da tabela. "Será que existe tal relação? Se existir é única?": deixe-os pensar.

5.3 A relação está correta? Existe contra-exemplo?

Neste momento poderá aparecer muitas equações diferentes, algumas serão meros "chutes". Ao pedir que os grupos comuniquem as equações que conseguiram, peça para que justifiquem (demonstrem) estas. Um fator que pode facilitar a proliferação de tais "chutes" é a tabela de movimentos ser "pequena", digamos, menor que 5.

Mas, mesmo para valores grandes de n é sempre possível (apesar de difícil) conseguir "chutes" que acertem o alvo para $\mathbf{m_0}$ até este $\mathbf{m_n}$, isto é, é possível conseguir uma função (polinômio) $\mathbf{p}$, tal que $\mathbf{p(k) = m_k}$, para $\mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2},..., \mathbf{n}$, que no entanto **NÃO** é a solução. Como curiosidade, apresentamos a seguir uma técnica geral que permite encontrar polinômios que coincidam em um número arbitrário de pontos (denominada *interpolação*):

Procuramos um polinômio $\mathbf{p(k) = a_0 + a_1 k^1 + a_2 k^2 + ... + a_n k^n}$ para o qual, $\mathbf{p(k) = m_k}$, $\mathbf{k=0, 1,..., n}$. Deste modo devemos "forçar" que o polinômio $\mathbf{p(.)}$ passe pelos $\mathbf{n+1}$ pares de pontos $(\mathbf{k}, \mathbf{m_k})$ e para isso só precisamos encontrar os coeficientes $\mathbf{x=(a_0 , a_1, a_2,..., a_n)}$ de modo que $\mathbf{p(0) = m_0}$, $\mathbf{p(1) = m_1}$ até $\mathbf{p(n) = m_n}$. Escrevendo essas $\mathbf{n+1}$ equações na forma de um sistema linear $\mathbf{A\ x = m}$, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ & & \cdots & & \\ 1 & n^1 & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

e para este sistema, pode-se provar que a matriz **A** é inversível e deste modo terá sempre uma (única) solução. Por exemplo, para **n** =2, o polinômio que interpola os três pontos $\{ (\mathbf{k}, \mathbf{m_k}) \}_{\mathbf{k=0,1,2}}$, onde **m** =($\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$)=(0,1,3) pode ser assim obtido: **A** =[1,0,0; 1,1,1; 1,2,4], assim **x** =(0,1/2,1/2) é solução de **Ax** = **m** e daí um "chute" que funciona para **n** =2 é

$$\mathbf{p(k)} = 0 + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}^2, \quad \text{de fato,} \quad \mathbf{p}(0)=0,\ \mathbf{p}(1)=1/2+1/2=1 \text{ e } \mathbf{p}(2)=1+2=3.$$

Com as equações divulgadas (tabela de movimentos), a classe pode começar a **separar o joio do trigo** , eliminando aquelas que sequer se ajustam aos pares ($\mathbf{n}$, $\mathbf{m_n}$) da tabela, ou seja, aquelas funções **f** tais que para algum **n** da tabela $\mathbf{f(n)} \neq \mathbf{m_n}$. As equações que resistiram a este teste merecem mais atenção.

O próximo passo é pedir aos grupos que apresentem alguma justificativa para suas equações, as que tiverem poderão ser classificadas como *conjecturas* , as restantes ficam "penduradas" a espera de alguma justificativa (durante as exposições, pode ocorrer algum argumento ao grupo que a propôs).

5.4 E se não aparecer sequer uma equação?

Bem, neste caso a turma está precisando de um "empurrão", não tão fraco de modo a não tirá-los da inércia e nem tão forte a ponto de empurrá-los ao fim do problema!

Aqui vão algumas perguntas que podem ajudá-los, mas é importante esperar respostas, faça a próxima apenas quando perceber que a questão não surtiu o efeito desejado:

- Se trocarmos as hastes de origem ou destino, isto acarreta outros valores para a tabela de movimentos?
- Por que?
- O "tipo" de movimento mínimo para *um* disco da haste **A** para **C** tem semelhanças com o movimento mínimo *do menor disco* , por exemplo, da haste **B** para a haste **A** , quando $\mathbf{n} \in \{ \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \}$?
- O "tipo" de movimento mínimo para *dois* discos da haste **A** para **C** , tem semelhanças com o movimento dos *dois menores discos* , por exemplo, da haste **C** para a haste **A** , quando $\mathbf{n} \in \{ \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5} \}$?
- Você pode *generalizar* este resultado (para outras origens, destinos...) ou ele é uma mera coincidência?

A generalização deveria ser a seguinte conjectura: *a movimentação ótima dos* **k** *menores discos da haste* **X** *para a haste* **Y** *,* $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$ *,* **X** *e* **Y** *em* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ *, é "análoga" à movimentação ótima de* **k** *discos de* **A** *para* **C** *, tendo o mesmo número de movimentos* (usamos **X** e **Y** para denotar hastes genéricas, podendo ser **A** , **B** ou **C**). No caso de o aluno concluir que é mera coincidência, ele deveria apresentar algum exemplo no qual o resultado não vale: um natural **k** e as hastes **X** e **Y** (este seria um contra-exemplo à conjectura).

Observação : Se a atividade for desenvolvida com material concreto, então é recomendável que seja utilizada um base triangular (equilátero) para as hastes. Esta é uma sutileza, porém pode ajudar na percepção dos alunos de que o número de movimentos só depende do número de discos (independendo da haste de origem ou de destino).

Se nenhuma das questões acima surtir efeito, o professor deverá ser mais direto, pois é quem tem o maior problema no momento! Eventualmente o problema está na forma de apresentação das questões, mas pode estar numa potencial apatia da classe. Em resumo, agora é a vez do professor ser criativo!

6 Uma formalização para a atividade

Se a classe não estiver preparada para todo o formalismo que apresentaremos, o professor deverá adaptá-lo. Por exemplo, em uma classe de "primeiro colegial" poderá ser difícil explicar o que é o processo de indução. Neste caso, uma saida seria explicar o processo intuitivamente, algo como: vale para 1, para 2, para 3, ...

Nesta seção apresentaremos uma formalização dos resultados que podem ser obtidos pelos grupos, para servir de guia à exposição final do professor. Esta exposição deve servir para ressaltar os conceitos trabalhados:

- uso de "força bruta" para obter algumas propriedades do objeto a ser matematizado (tabela de movimentos);
- necessidade de "chutes" de relações que poderiam descrever as propriedades observadas (conjecturas);
- eliminação de relações incorretas (contra-exemplos para conjecturas);
- demonstração da corretude de uma conjectura (o **teorema final**).

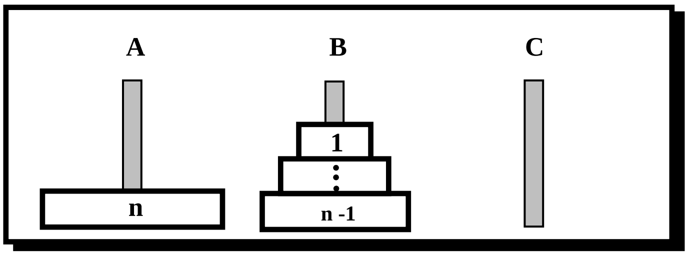
Provavelmente os alunos sentirão dificuldade para obter uma regra de movimentação "direta". Esperamos que eles possam perceber a seguinte relação de recorrência: para alcançar o mínimo para **n** discos ($\mathbf{m_n}$) de **A** para **C** é necessário mover "otimamente" **n-1** discos de **A** para **B**, o disco maior de **A** para **C** e novamente mover "otimamente" **n-1**, desta vez, de **B** para **C**, ou seja,

Conjectura : Se $\mathbf{m_n}$ é o número mínimo de movimentos para $\mathbf{n \geq 0}$ discos, então vale a seguinte relação

$$\begin{cases} m_n = 0 & , n=0 \\ m_n = 2\,(m_{n-1}) + 1 & , n>0 \end{cases}$$

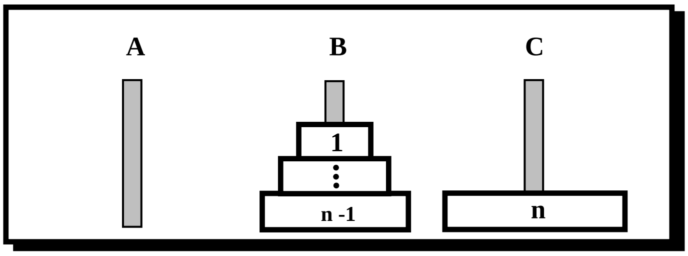
Demonstração (Inicialmente é importante notar que apesar de existir um número infinito de movimentos possíveis para **n>0** discos, existe um mínimo e deste modo a função $\mathbf{M(n)=m_n}$ está bem definida).
Claramente a relação é verdadeira para **n=0** . Considere, então um **n>0** . Para este caso, existe um disco que podemos claramente estimar um número mínimo de movimentos: o maior disco, **n** , precisa ser movido ao menos uma vez. Agora basta apresentarmos uma sequência de movimentação que efetue apenas **1** movimento com o disco **n** , movimentando os demais também de maneira mínima, da seguinte forma: para mover **n** de **A** para **C** , de acordo com as regras, é necessário:

PASSO 1: *Mover (de modo mínimo) os **n-1** primeiros discos, da haste **A** para a haste **B** .*



Para liberar o dico **n**, os discos **1** à **n-1** deverão estar todos na haste **B**, como indicado na figura ao lado. Por estarmos procurando uma regra de movimentação ótima, devemos mover de maneira ótima os **n-1** menores discos de **A** para **B** e como as hastes de origem/destino não importam, devemos usar exatamente $\mathbf{m_{n-1}}$ movimentos
(lembre-se que, por construção, $\mathbf{m_{n-1}}$ é o número mínimo de movimentos para **n-1** discos).

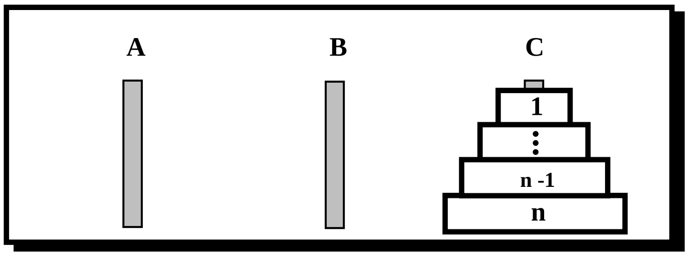
PASSO 2: *Mover (de modo mínimo) o disco **n**, da haste **A** para a haste **C** .*



O próximo passo é transportar o disco maior (**n**) de **A** para **C**, como indicado abaixo, consumindo apenas um movimento. No que diz respeito apenas ao disco n, movê-lo uma única vez é o mínimo que podemos alcançar.

PASSO 3: *Mover (de modo mínimo) os **n-1** discos menores, da haste **B** para a haste **C** .*

E finalmente, transportar de maneira ótima os **n-1** menores discos de **B** para **C**, e pelos mesmos motivos expostos no passo 1, usamos mais $\mathbf{m_{n-1}}$ movimentos.



Portanto, totalizando os passos 1, 2 e 3, concluimos a tese

$$\mathbf{m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2\,(m_{n-1}) + 1},$$

finalizando a demonstração. ■

Como já observamos, a idéia da demonstração acima pode ser utilizada para ajudar que os próprios alunos descubram a relação de recorrência, para isso deve-se questioná-los sobre *qual disco eles saberia mover "otimamente"* (o maior) e *quais as condições para que consigam* (que a haste A seja liberada de maneira ótima). O professor pode propor a existência de um "oráculo" que efetuaria os movimentos intermediários e usar tal idéia para que os alunos percebam a estrutura indutiva: mostra-se que o processo funciona par $\mathbf{n_0 = 1}$ (*base*); supõe-se que funcione até **n-1** (*passo*) e basta arrumar o passo **n**.

Uma vez conseguido demonstrar a conjectura proposta, esta muda de condição (" *status* "), passa a ser um teorema. Mas, esta equação ainda traz um incoveniente, é recorrente! Seria muito interessante se pudéssemos obter uma *fórmula fechada* , é o que tentaremos a seguir. Abrindo a equação obtida,

$$\mathbf{m_n = 2\,(m_{n-1}) + 1 = 2\,(\,2\,(m_{n-2}) + 1\,) + 1 = ... = \overbrace{2\,(\,2\,(\,...2}^{n-1 \text{ dígitos } 2}\,(2\,m_1 + 1)\overbrace{+ 1 ...\,) + 1\,) + 1}^{n-1 \text{ dígitos } 1}.}$$

Vamos contar o número de fatores. O termo $\mathbf{m_1 = 1}$ é multiplicado por **n-1** fatores **2**, pois, aplicamos a recorrência **n-1** vezes (de $\mathbf{m_{n-(1)}}$ até $\mathbf{m_1 = m_{n-(n-1)}}$), daí $\mathbf{m_1}$ é multiplicado por $\mathbf{2^{n-1}}$. Já os dígitos **1** , dentro dos parênteses: o mais interno é multiplicado por **n-2** fatores **2** (um a menos que $\mathbf{m_1}$), o segundo mais interno por $\mathbf{2^{n-3}}$, o seguinte por $\mathbf{2^{n-3}}$ e assim por diante. Logo, (deduza ou questione os alunos sobre a forma fechada para a progressão geométrica, P.G., abaixo)

$$\mathbf{m_n = 2^{n-1}\,m_1 + (2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^1 + 2^0) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1}.$$

A última identidade pode ser obtida via "soma telescópica": seja $S_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^1 + 2^0$, como $2S_n = 2*2^{n-1} + 2*2^{n-2} + ... + 2*2^1 + 2*2^0 = 2^n + 2^{n-1} + ... + 2^2 + 2^1$, daí $S_n = 2S_n - S_n = 2^n + 2^{n-1} + ... + 2^2 + 2^1 - 2^{n-1} - 2^{n-2} - ... - 2^1 - 2^0 = 2^n - 1$.

Mas, para ilustrar melhor uma demonstração por indução, re-examinaremos a validade da identidade $\mathbf{m_n = 2^n - 1}$, demostraremos que ela está correta via indução finita.

Teorema : Para o jogo Torre de Hanói, com n discos, o número mínimo de movimentos é $\mathbf{m_n = 2^n - 1}$.
Demonstração (por indução no número de discos)

Seja **S** o conjunto dos números naturais **n** , tais que **n** discos podem ser movidos com um mínimo de $\mathbf{2^n - 1}$ movimentos (note que, também podemos tomar **0** como base da indução, na linha abaixo).

Base da indução: $\mathbf{1 \in S}$, pois para **1** disco necessitamos de $\mathbf{1 = 2^1 - 1}$ movimentos.

Passo da indução: Vamos supor que $\mathbf{k \in S}$, $\mathbf{k \geq 1}$ (isto é, **k** discos são movidos *otimamente* , com $\mathbf{2^k - 1}$ movimentos). Vamos provar que $\mathbf{k + 1 \in S}$, isto é, que $\mathbf{m_{k+1} = 2^{k+1} - 1}$.

Para isto, vamos usar a equação recorrente $\mathbf{m_n = 2\,(m_{n-1}) + 1}$. Tomando **n=k+1** , obtemos $\mathbf{m_{k+1} = 2\,m_k + 1}$.

Aplicando a hipótese de indução para $\mathbf{m_k}$ ($\overset{H.I.}{=}$ $\mathbf{2^k - 1}$) podemos mostrar que

$\mathbf{m_{k+1} = 2\,m_k + 1 = 2\,(\,2^k - 1\,) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1}$,

ou seja, $\mathbf{k+1 \in S}$, finalizando a demonstração. ■

Algumas observações sobre questões "delicadas" relativas à atividade:

- A descrição recursiva do método de movimentação, apesar de parecer complicada, é um modo muito eficiente (curto) de enunciar a regra. Dito de outra forma: será muito difícil estabelecer uma regra direta do tipo: "mova o maior disco para a haste C, se este disco estiver "livre" e a haste vazia, caso contrário, etc".
- Alguns alunos mais atentos, podem indagar se existe outra fórmula ou regra. Sobre a regra use o item acima como base de discussão, sobre a existência de outras fórmulas, uma resposta pode ser: existem (infinitas) outras que descrevem o número de movimentos, no entanto não tendo relação com a regra de movimentação. Para exemplificar, vamos construir uma fórmula bastante artificial, mas que também "interpola" (aspas devido a não ser baseada em polinômios) os pares de pontos que descrevem a quantidade de movimentos ($\mathbf{n}$, $\mathbf{2^n - 1}$),

$$\text{seno}(\pi/\mathbf{2} + \mathbf{2n}\,\pi)\ (\mathbf{2^n - 1}).$$

  Lembrando que seno(π/**2**)=1, e que **2n**π é múltiplo de **2**π, ou seja, de uma volta completa de 360 graus, logo, para todo natural n, seno(π/**2 + 2n** π)=seno(π/**2**)=1.
- Se tiverem tempo, use estas observações para chamar a atenção dos alunos para o fato de que questões de existência (existir uma regra mínima, uma fórmula mínima, uma base para a indução, etc) e de unicidade (existe outra regra ou outra equação) são muito comuns em Matemática.

7 CONCLUSÃO: O MUNDO NÃO VAI ACABAR TÃO CEDO!

Voltando a lenda da Torre de Hanói, os cientistas supõem que o mundo começou a aproximadamente 4 bilhões de anos, portanto seria também deste período os monges do monte indiano.

Vamos agora fazer uma estimativa de quanto tempo nos resta:

Como os monges movem os discos a razão de **1** por segundo, o mundo deve durar precisamente $\mathbf{2^{64} - 1}$ segundos. Como cada dia tem **24** horas, cada hora **60** minutos e cada minuto **60** segundos, portanto cada ano tem aproximadamente **365 x 24 x 60 x 60** segundos e **31 536 000 = 65 x 24 x 60 x 60** < $\mathbf{2^{25}}$ **= 33.554.432**.

Logo o mundo deve durar mais que $\mathbf{(2^{64} - 1)/2^{25}}$ anos, o que é aproximadamente $\mathbf{2^{39}}$ anos.

Por sua vez, é maior que $\mathbf{2^{39} > 5.49755 \times 2^{11} = 5.49755 \times 2^2 \times 2^9}$, portanto ainda nos restam, mais que

100 bilhões de anos !!!!!!!!

Isto admitindo que jamais um dos monges erre sua árdua e repetitiva tarefa!

Portanto fique tranquilo, segundo essa lenda, ainda teremos tempo suficiente para "danificar" este e, quiçá, outros planetas antes do grande e definitivo apocalipse...