Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - "João Afonso Pascarelli"
IME-USP

Mostra do CAEM 2019

17 a 19 de Outubro, IME-USP

Oficina 6

Resolução de Problemas Clássicos de Geometria com Dobraduras

Murilo Cattaneo Cruz
Licenciando do Instituto de Matemática e Estatística (IME−USP)
murilo.cattaneo.cruz@usp.br

Profa. Dra. Ana Paula Jahn
Instituto de Matemática e Estatística (IME−USP)
anajahn@ime.usp.br

RESUMO: As dobraduras podem ser vistas como recursos didáticos para envolver alunos de diferentes níveis de ensino na resolução de problemas e produção de argumentos matemáticos em justificativas de propriedades ou resultados. Essa oficina propõe discutir alguns desses problemas, em particular a resolução de dois problemas clássicos de Geometria por meio de dobraduras.

Mostra do CAEM 2019
17 a 19 de outubro
Mesa Redonda
Pôsteres
Oficinas
Palestras
IME-USP
USP Universidade de São Paulo

Oficina 06 – *Resolução de Problemas Clássicos de Geometria com Dobraduras*

Murilo Cattaneo O. M. Cruz (Licenciando em Matemática, IME-USP)
Profa. Dra. Ana Paula Jahn (IME-USP)

1. Introdução

Origami é uma palavra de origem japonesa utilizada para designar a arte dobrar papel – *Oru* significa dobrar e *Kami* significa papel. Essa designação começou a ser adotada no Japão por volta do século IV, quando a dobragem de papel era utilizada como símbolo religioso e venerada em templos. A partir do final século VIII, a arte de dobrar papel também começou a ser pensada como desafio e passatempo. Desse período em diante, o Origami deixou de ser conhecido apenas no Japão, sendo difundido em outros países, como China e Espanha (FROLINI, 2014).

Diferentemente de como era pensado inicialmente, o Origami não se reduz apenas à imitação de uma construção utilizando dobradura. Dada uma dobradura, é necessário entender como ela é feita, as técnicas e propriedades utilizadas em sua construção para replicá-la.

Tradicionalmente, no Origami, todas as dobraduras são feitas a partir de um quadrado de papel, que pode ser colorido. Contudo, o papel utilizado pode ter outras formas geométricas, desde que não se corte nem cole. De acordo com a classificação de Monteiro (2008), o Origami pode dividido em 3 grupos:

- Origami simples, obtido ao fazer dobraduras em um pedaço de papel;
- Origami composto, obtido pela união de vários origamis simples; e
- Origami modular, um origami composto, no qual todas as peças são iguais geometricamente.

Essa oficina terá como foco o desenvolvimento de atividades com dobraduras do primeiro grupo, mais especificamente, a resolução de alguns problemas geométricos com Origami simples. Isso porque, no final do século XX, o Origami passou a ser objeto de estudo em Matemática quando os fundamentos da antiga arte despertaram interesse de matemáticos. Histórica e culturalmente, o Origami assume várias formas e diversas inspirações. A relação da Matemática com o Origami se dá no sentido de descobertas e esquematizações de conceitos matemáticos utilizados no Origami; relação com a Geometria Euclideana, em particular em relação às propriedades de figuras e às transformações geométricas do plano obtidas com dobraduras.

2. O Origami no Ensino de Geometria

O Origami tem sido utilizado, cada vez mais, como recurso didático para o ensino de Geometria na Educação Básica e também na formação de professores. A partir de algumas operações iniciais, é possível ir ampliando as construções com dobraduras, similarmente ao desenvolvimento de um sistema axiomático. Ao resolver problemas com essas dobraduras de papel, os alunos têm a possibilidade de construir conhecimento geométrico, de forma mais intuitiva e experimental. Desse modo, eles podem incorporar à sua atividade intelectual novos significados para os objetos e suas propriedades matemáticas. Essa abordagem estimula alunos e professores, em um contexto de estudo da Geometria, a produzir significações e ressignificações dos objetos em estudo. Essa ideia é corroborada por Monteiro (2008):

> Também o ensino utiliza cada vez mais o Origami. De uma forma geral, a dobragem de papel permite desenvolver, entre outros, a destreza manual, o sentido estético de arte e a comunicação. Em particular, no ensino da Matemática, o Origami é utilizado para:
>
> - sentido de forma, tamanho e cor;
> - fundamentos de geometria;
> - conceitos e vocabulário matemático;
> - simetrias, congruências e ângulos;
> - fracções, razões, proporções e medições,
> - resolução de problemas, com espírito analítico e crítico;
> - investigação de objectos tridimensionais e relações espaciais;
> - exploração de padrões e estabelecimento de relações. (MONTEIRO, 2008, p. 12)

Segundo Hull (2012), o Origami não só oferece uma maneira acessível de tornar o aprendizado ativo nas salas de aulas, como também é um campo fértil para a aprendizagem baseada em descoberta. Segundo esse autor, muitos tópicos matemáticos diferentes podem surgir na dobra de papel.

Assim como nas construções com régua e compasso, para as construções com Origami também existem regras. O primeiro estudo que sistematizou as regras das construções com dobraduras foi desenvolvido por Humiaki Huzita, entre 1927 e 1929, matemático e artista de origami ítalo-japonês.

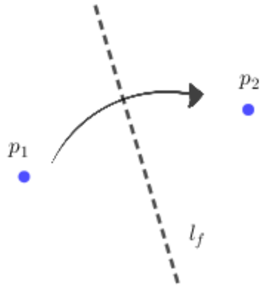
Huzita apresentou um conjunto de seis operações[1] que podem ser feitas para se definir uma única dobra, a partir da sobreposição de ponto sobre ponto, ponto sobre reta ou reta sobre reta. Essas operações ficaram conhecidas como Axiomas de Huzita. As construções com dobraduras são obtidas através de aplicações repetidas dessas operações. No que segue, apresentamos as operações que constituem esse conjunto de axiomas (LANG, 2010, p. 38-39).

---

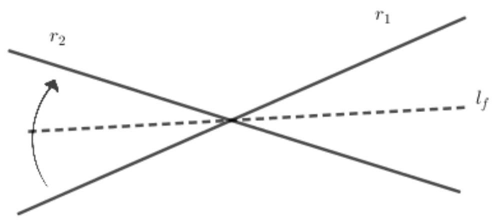
[1] Em 2003, uma 7ª operação foi apresentada por Koshiro Hatori, já identificada anteriormente por Jacques Justin. Para mais detalhes, ver: (LANG, 2010, p. 40).

(O1) Dados dois pontos P_1 e P_2, podemos dobrar uma reta que os conecte.

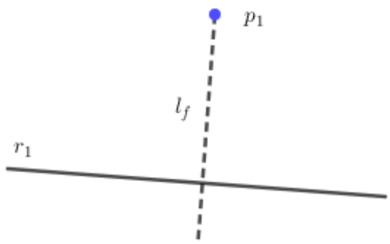
(O2) Dados dois pontos P_1 e P_2, podemos dobrar P_1 sobre P_2;



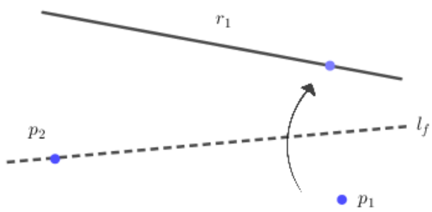
(O3) Dadas duas retas r_1 e r_2, podemos dobrar r_1 sobre r_2;



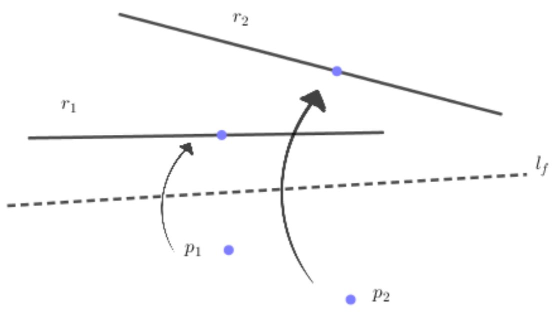
(O4) Dados um ponto P_1 e uma reta r_1, podemos fazer uma dobra perpendicular a r_1, contendo P_1;



(O5) Dados dois pontos, P_1 e P_2, e uma reta r_1, podemos fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e que contenha P_2;



(O6) Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, podemos fazer uma dobra que sobreponha P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.



Note que em (O2), ao fazermos a dobra que sobrepõe P_1 e P_2, é gerada a reta l_f, de modo que $d(P_1, l_f) = d(P_2, l_f)$ e $l_f \perp P_1P_2$. A partir desses argumentos, podemos concluir que l_f é a mediatriz do segmento P_1P_2. Assim sendo, sob o ponto de vista das transformações geométricas do plano, podemos definir $\varphi_{l_f}: \wp \to \wp$, bijetora, tal que $\varphi_{l_f}(P_1) = P_2$, com $\wp$ um conjunto de pontos do plano. Chamamos φ_{l_f} de reflexão em relação à reta l_f. É possível provar que a reflexão é uma isometria, isto é, conserva distâncias e ainda que preserva o alinhamento de pontos, ou seja, leva reta em reta. Assim sendo, em (O3), segue que $\varphi_{l_f}(r_1) = r_1$.

Em se tratando de Construções Geométricas com régua e compasso, na tradição de Euclides, a resolução de um problema passa pelas seguintes etapas: análise, construção, demonstração e síntese. Mais especificamente, dado o problema, o primeiro passo é a *análise*, supor e visualizar o problema resolvido e identificar elementos que ajudem no planejamento da construção; o segundo passo é a *construção* de fato, onde cada passo deve ser descrito precisamente; o terceiro passo é a *demonstração*, onde, lançando mão de argumentos válidos, prova-se que a construção apresentada é solução para o problema; e o quarto passo é a *síntese*, onde são verificados casos particulares, condições de existência e o número de soluções. Em um modelo axiomático com dobraduras, essas etapas também devem ser garantidas em problemas de construções geométricas.

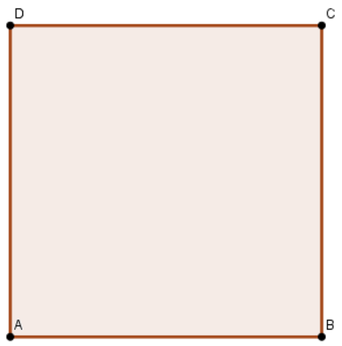
Partimos do pressuposto de que problemas abordados por meio das quatro etapas descritas são motivadores para quem os estuda, pois conduzem à descoberta de propriedades. Também são educativos, pois requerem análise da situação, planejamento e execução da construção e uma síntese posterior para discutir o número de soluções e compatibilidade dos dados (WAGNER, 1993).

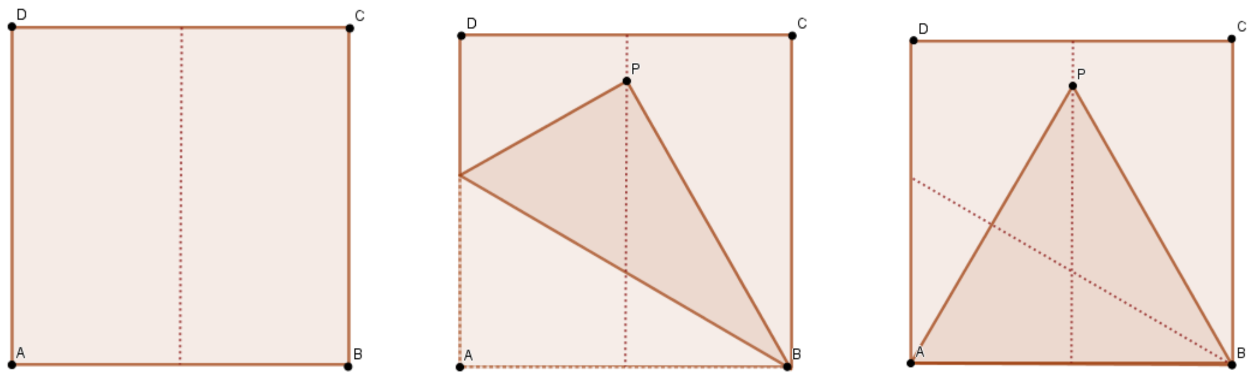
Na sequência, apresentamos alguns problemas de construção que devem ser resolvidos com dobraduras.

3. Atividades

3.1 Construindo um triângulo equilátero[2]

O objetivo é construir, através de dobradura, um triângulo equilátero a partir de um quadrado de papel dado.





(1) (2) (3)

1) Descreva, detalhadamente, o passo a passo da construção ilustrada acima.

2) Agora, prove que a sua construção resultou em um triângulo equilátero.

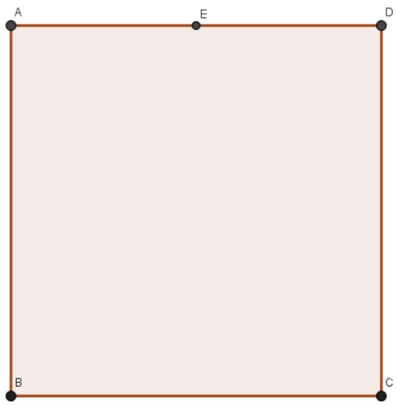
3) Discuta outra(s) possível(is) solução(ões).

4) E, por fim, qual(is) solução(ões) resulta(m) no triângulo de maior área?

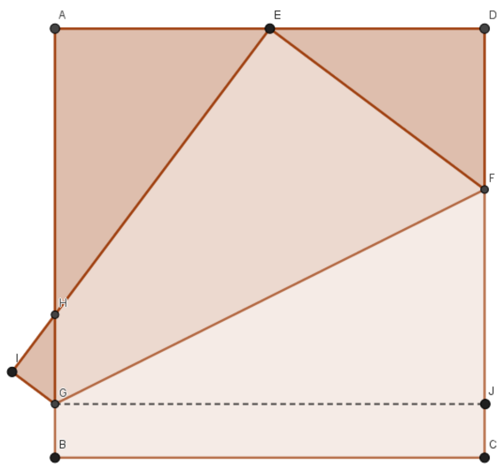
[2] Atividade adaptada de HULL (2012).

3.2 Triângulos Especiais

Tome um quadrado $ABCD$ de papel e, sobrepondo os pontos A e D, faça uma dobra suave no lado oposto, apenas no topo, para marcar o ponto médio E do segmento AD.



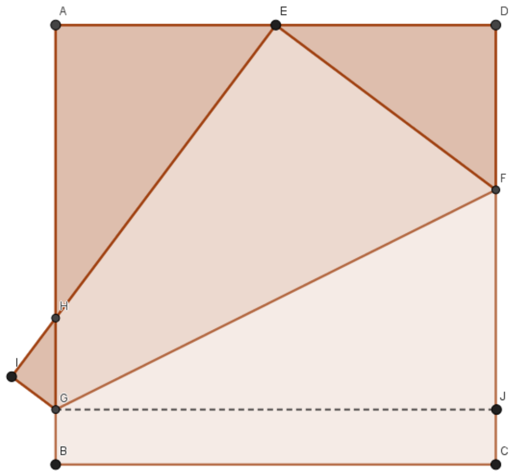
Agora, sobreponha o vértice C (inferior direito) sobre o ponto E, para formar a dobra que dá origem ao segmento FG, conforme figura que segue.



1) Calcule a medida EF. Para tal, considere que o quadrado $ABCD$ tem lados de medida 1 u.c.

2) O que pode ser concluído acerca do triângulo DEF? (Dica: comece com $DF = a$).

3.3 Primeiro Teorema de Haga



Da dobra acima, tem-se, também, outros triângulos.

1) Determine as medidas dos lados do triângulo *EAH*. (Dica: conclua que os triângulos *EAH* e *FDE* são semelhantes).

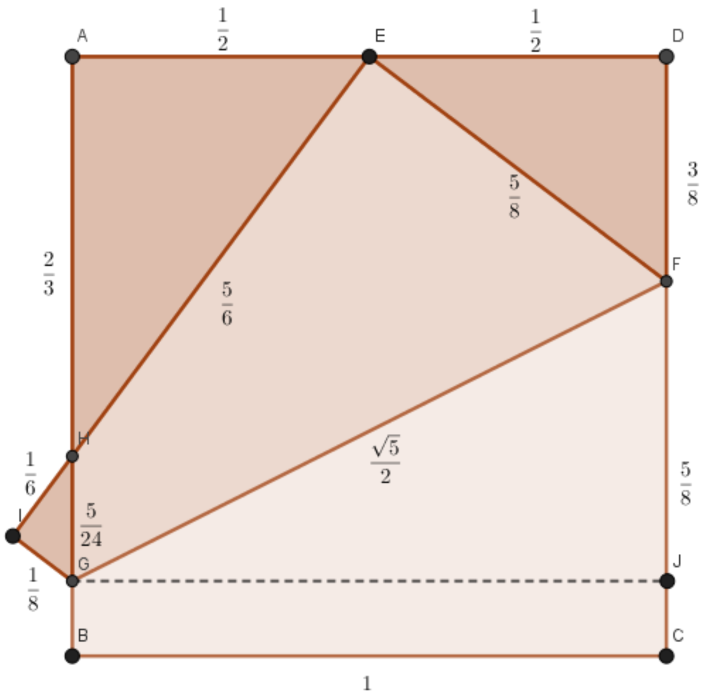
2) Calcule as medidas *AH*, *HE* e *EA*.

3) Analise, agora, o triângulo *IGH e* calcule as medidas *IG, GH* e *HI*.

4) Finalmente, para completar o estudo das medidas de cada segmento observado na dobradura, calcule a medida *FG*.

5) Por fim, escreva todas as medidas de segmento calculadas.

Você deve ter obtido as medidas dos segmentos conforme figura que segue.



Os resultados acima embasam o seguinte teorema:

Primeiro Teorema de Haga: Seja A*BCD* um quadrado qualquer, onde:

i. A é o vértice superior esquerdo;

ii. B é o vértice inferior esquerdo;

iii. C é o vértice inferior direito; e

iv. D é o vértice superior direito.

Dobrando *ABCD*, de modo que C sobreponha-se ao ponto médio do lado superior, cada lado do quadrado é dividido em uma razão fixa, como abaixo:

a. O lado direito, que contém C, é dividido pelo ponto F na razão 3:5;

b. O lado esquerdo é dividido pelo ponto H na razão 2:1;

c. O lado esquerdo é dividido pelo ponto G na razão 7:1; e

d. O lado inferior é dividido pelo ponto H na razão 1:5.

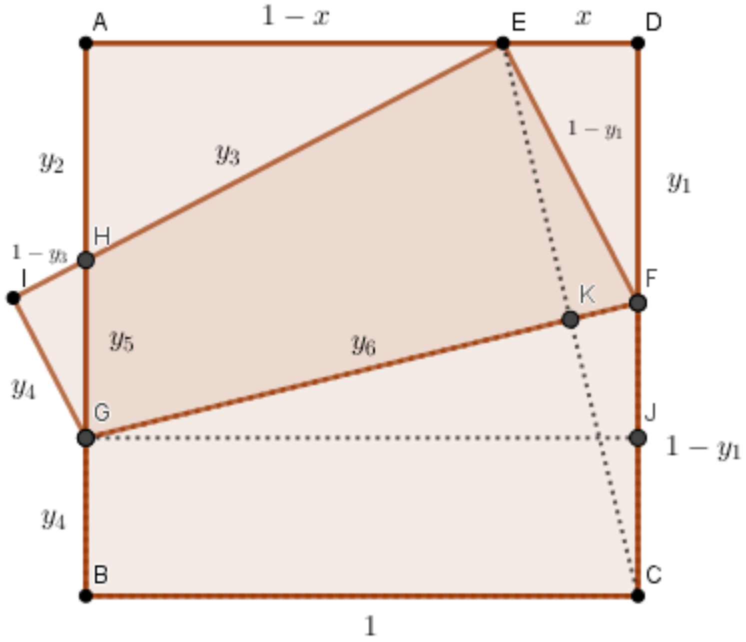
Demonstração: Você já fez ao longo da Atividade 3.1.

Em (a) e (c), as razões podem ser obtidas dividindo um lado na metade, então na metade de novo, e novamente na metade. Mas as razões em (c) e (d) não podem ser obtidas dessa maneira. Portanto, essa única e simples dobra (C sobrepondo-se ao ponto médio do segmento *AD*) é bastante precisa e útil.

A dobradura utilizada no teorema é chamada de **Dobra do Primeiro Teorema de Haga** (HAGA, 2008, p. 7).

3.4 Generalização do Primeiro Teorema de Haga

No procedimento anterior, a dobradura foi feita tendo como base o ponto médio do lado superior do quadrado. Agora, dados os diversos resultados obtidos anteriormente, pode-se perguntar: quais seriam os resultados obtidos se o ponto de partida para a dobradura fosse um ponto qualquer do lado mencionado (e não o ponto médio)? A imagem da Figura abaixo representa a dobradura determinada pelo vértice C e por um ponto qualquer E do segmento AD.



Seja $ED = x$. Então, $AE = 1 - x$, e as medidas dos diversos segmentos podem ser dadas em função de x. Apresentamos algumas delas:

i. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo EDF, tem-se:

$$x^2 + y_1^2 = (1 - y_1)^2 \Rightarrow x^2 + y_1^2 = 1 - 2y_1 + y_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1-x^2}{2}.$$

ii. Calculemos, agora, $HA = y_2$. Nos triângulos HAE e EDF, tem-se:

$$m(\angle AEH) + m(\angle FED) = 90° \ (I) \text{ e } m(\angle AHE) + m(\angle AEH) = 90° \ (II).$$

De (I) e (II), segue que:

$$m(\angle AEH) + m(\angle FED) = m(\angle AHE) + m(\angle AEH) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle FED) = m(\angle AHE)$$

Portanto, pelo caso AA de semelhança: $\Delta HAE \approx \Delta EDF$. Desse modo, existe uma relação de proporcionalidade entre as medidas dos lados dos respectivos triângulos:

$$\frac{y_1}{1-x} = \frac{x}{y_2} \Rightarrow y_1 y_2 = x(1-x) \underset{(I)}{\Rightarrow} \frac{1-x^2}{2} y_2 = x(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)(1-x)}{2} \cdot y_2 = x(1-x) \Rightarrow y_2 = \frac{2x}{1+x}$$

iii. Ainda usando que $\Delta HAE \approx \Delta EDF$:

$$\frac{y_2}{x} = \frac{y_3}{1-y_1} \Rightarrow y_3 = \frac{y_2(1-y_1)}{x} \underset{(I)e\ (II)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow y_3 = \frac{\frac{2x}{1+x}\cdot\left(1-\frac{1+x^2}{2}\right)}{x} = \frac{\frac{2x}{1+x}\cdot\frac{1+x^2}{2}}{x} = \frac{\frac{x}{1+x}\cdot(1+x^2)}{x} = \frac{1+x^2}{1+x} = y_3 = EH$$

iv. Para calcularmos $y_4 = GI$, consideremos o triângulo CEF: temos que a reta FG é mediatriz de EC pela construção da dobradura. Assim, EC ⊥ FG. Também: $m(\angle CKF) = m(\angle CDE)$ e $\angle FCK$ é comum a ΔCDE e ΔCKF. O que nos leva a concluir que $\Delta CDE \approx \Delta CKF$. Portanto, $\angle DEC \equiv \angle KFC$. Desse fato, segue que $\Delta CDE \equiv \Delta GJF$ pelo caso LAA_o. Daí, $FJ = x = DE$. Assim sendo,

$$y_4 = JC = 1-(y_1+x) \Rightarrow y_4 = 1-\tfrac{1-x^2}{2}+x = \tfrac{(1-x)^2}{2}.$$

v. Como $y_2 + y_5 + y_4 = 1$, $y_5 = 1 - y_2 - y_4 = 1 - \frac{2x}{1+x} - \frac{(1-x)^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_5 = 1-\left(\tfrac{2x}{1+x}+\tfrac{(1-x)^2}{2}\right).$$

vi. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo *FGJ*, calculamos y_6:

$$y_6^2 = FJ^2 + JG^2 \Rightarrow y_6 = \sqrt{FJ^2+JG^2} = \sqrt{FJ^2+1} \underset{FJ=x}{\Rightarrow} y_6 = \sqrt{x^2+1}.$$

Com isso, foram obtidas as medidas dos segmentos estudados em termos de *x*. Para melhor apreciar as relações descobertas, calcule as medidas encontradas para valores particulares de x e complete a tabela abaixo. (*Obs*. Registramos as medidas para x valendo ½, ¼ e ¾. Note as várias relações obtidas!)

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$	
y_1	$1-y_1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{25}{32}$
y_2	$1-y_2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
y_3	$1-y_3$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{25}{28}$	$\frac{3}{28}$
y_4	$1-y_4$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{31}{32}$

3.5 Duplicação do Cubo

O problema da Duplicação do Cubo está entre os vários problemas matemáticos clássicos existentes antes de Euclides, juntamente com Trissecção do Ângulo e Quadratura do Círculo.

Segundo uma lenda, em 427 a.C., uma peste teria matado Péricles juntamente com um quarto da população ateniense. Muito preocupados, os cidadãos de Atenas consultaram, em Delos, o oráculo de Apolo para descobrir como enfrentar a doença. O oráculo respondeu que um novo altar deveria ser feito para Apolo, o qual deveria ser a duplicação do altar existente, mantendo o formato de um cubo. Um novo altar foi construído, onde a aresta tinha o dobro da medida da aresta do altar antigo. Mas a peste não foi afastada, pois o volume foi multiplicado por 8, e não por 2. A partir dessa lenda, surgiu o problema da Duplicação do Cubo, ou Problema Deliano (ROQUE, 2012, p. 155-156).

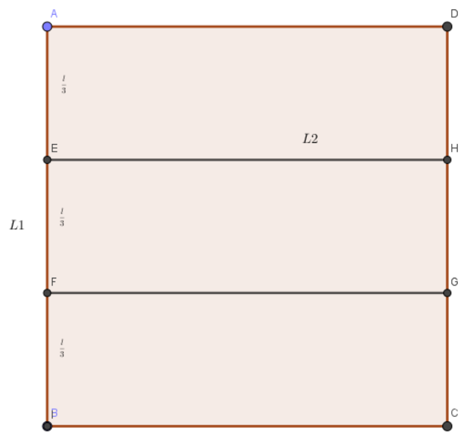
O Problema da Duplicação do Cubo consiste em, dado um cubo, construir um novo cubo com o dobro do volume do primeiro. Considerando um cubo unitário, resolver esse problema é equivalente a construir o número $\sqrt[3]{2}$. (Por quê?)

Construir um número *n* significa construir um segmento de reta de medida *n*. Um importante resultado de Álgebra – aqui apresentado de modo simplificado – é que um número só será construtível se, e somente se, for raiz de algum polinômio de grau igual a uma potência de 2.

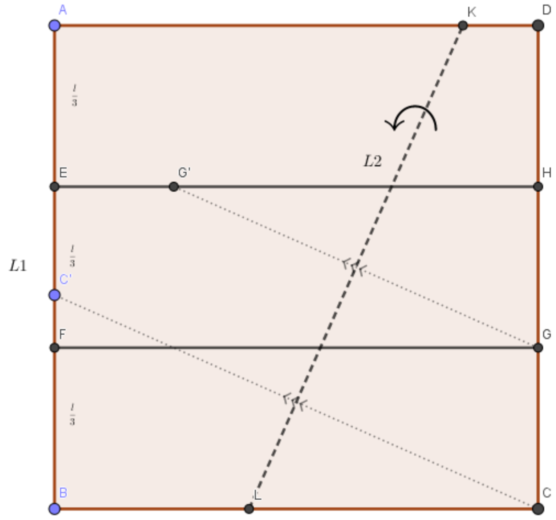
Desse modo, o problema da Duplicação do Cubo é insolúvel com régua e compasso, pois o número que deve ser construído é $\sqrt[3]{2}$. Se $\alpha = \sqrt[3]{2}$, então a^3= 2, que é equivalente a $\alpha^3 - 2 = 0$. Ou seja, $\sqrt[3]{2}$ é raiz de um polinômio que não é potência de 2.

Contudo, esse problema pode ser resolvido com dobradura! ☺

Tendo um quadrado de papel em mãos, faça duas dobras que o divida em 3 retângulos congruentes, ou seja, marque os pontos que trissectam dois lados opostos do quadrado. Para isso, utilize a dobra do Primeiro Teorema de Haga apresentada anteriormente. Representamos, abaixo, como o quadrado com as dobras deve ficar.



Em seguida, faça uma dobra que sobreponha os pontos C sobre o lado AB que chamamos de $L1$, e o ponto G sobre o segmento EH, que chamamos de $L2$, simultaneamente. Ou seja, $C' \in AB$ e $G' \in$ EH, onde $C' = \varphi(C)$ e $G' = \varphi(G)$, φ é a reflexão em relação à reta determinada pela dobra.

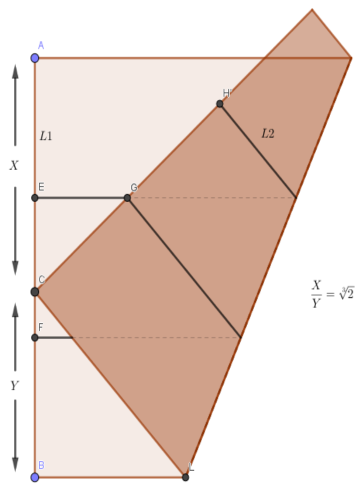


Mantendo a dobra como na figura acima, com a movimentação dos pontos pela dobradura, temos que $C'=C$ e $G'=G$.

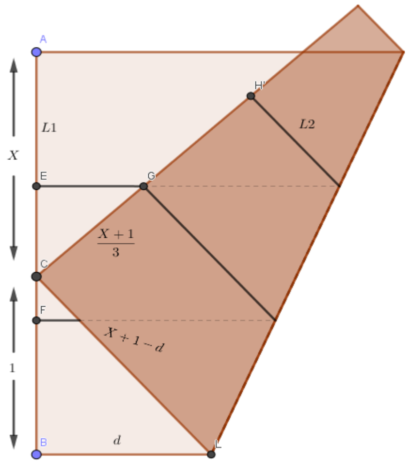
Temos que a imagem do ponto C por φ divide o lado AB em duas partes, uma de medida X e outra de medida Y, e que $\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2}$.

Isso resolve a construção, pois, se X e Y são, respectivamente, as medidas das arestas do cubo a ser duplicado e do cubo original, $\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow X = \sqrt[3]{2}Y \Leftrightarrow X^3 = 2Y^3 \Leftrightarrow V_d = V_o$, onde V_d e V_o são os volumes dos cubos duplicado e original, respectivamente.

Basta verificar a validade para uma aresta de medida 1 u.c., pois, provando a partir dela que $\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2}$, se quisermos obter a aresta que duplica um cubo qualquer, basta multiplicarmos o segmento com essa medida pela aresta do cubo a ser duplicado.



Seja $X = AC$ e $Y = BC$. Se $Y = 1$, então o lado do quadrado mede $X+1$.



Verifique que $X = \sqrt[3]{2}$. (Exercício)

Vamos dar nomes aos objetos geométricos de acordo com a imagem acima.

Como o lado do quadrado mede $X+1$, temos que CG, que mede 1/3 do lado, tem por medida $\frac{X+1}{3}$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo CBL, temos que:

$$(X+1-d)^2 = 1 + d^2 \Rightarrow X^2 + 2X + d^2 - 2dX - 2d + 1 = 1 + d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^2 + 2X - 2dX - 2d = 0 \Rightarrow X^2 + 2X - d(2X+2) = 0 \Rightarrow X^2 + 2X = d(2X+2) \Rightarrow$$

$$d = \frac{X^2 + 2X}{2X + 2} (I)$$

Temos que: $EC = X - \frac{X+1}{3} = \frac{2X-1}{3}$. Também sabemos que, pelo Segundo Teorema de Haga, os triângulos CBL e CEG são semelhantes. Portanto, temos:

$$\frac{d}{X+1-d} = \frac{2X-1}{X+1} \underset{(I)}{\Rightarrow} \frac{(X^2+2X)}{X^2+2X+2} = \frac{2X-1}{X+1} \Rightarrow$$

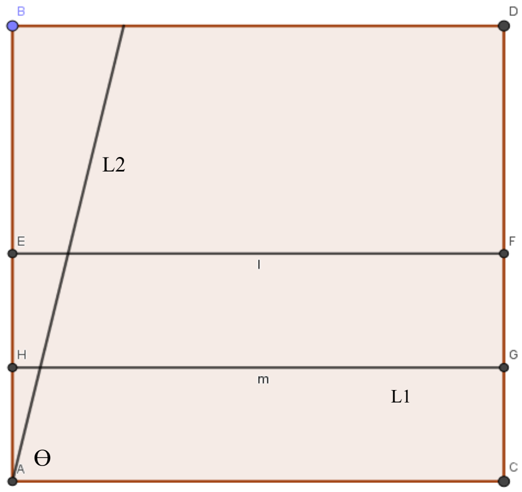
$$\Rightarrow X^3 + 3X^2 + 2X = 2X^3 + 3X^2 + 2X - 2 \Rightarrow X^3 = 2 \Rightarrow X = \sqrt[3]{2}$$

3.6 Trissecção do Ângulo

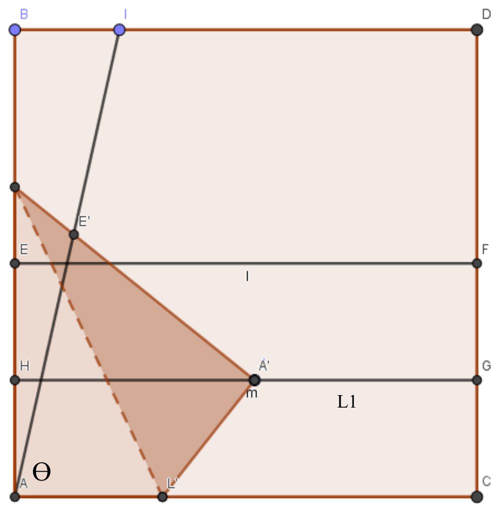
Como já mencionado, o problema da trissecção de um ângulo é insolúvel com régua e compasso. Contudo, utilizando outra ferramenta, o Origami, é possível trissectar um ângulo. Vamos a essa construção!

Tenha em mãos um quadrado de papel. Faça uma dobradura ($L2$) que parte de um vértice do quadrado e encontra um lado oposto não adjacente, formando uma aba triangular. Os segmentos $L2$ e AC têm o ponto A em comum, portanto, as semirretas a partir de A, que contêm esses segmentos determinam um ângulo θ. Esse é o ângulo que queremos trissectar.

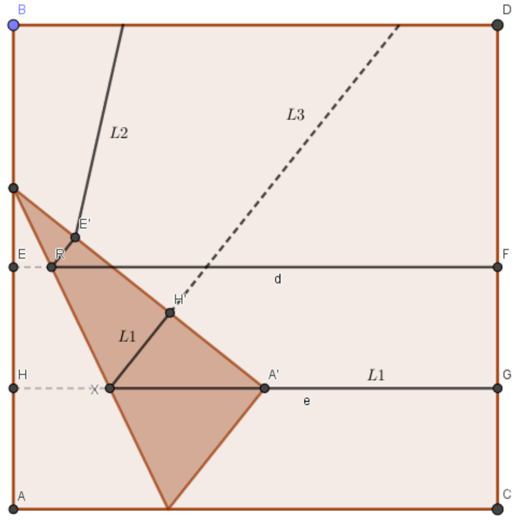
Em seguida, faça duas dobraduras paralelas à base do quadrado; uma que passa pelo ponto médio E do segmento AB e outra ($L1$) que passe pelo ponto médio H do segmento AE. O quadrado deverá ficar como na figura abaixo.



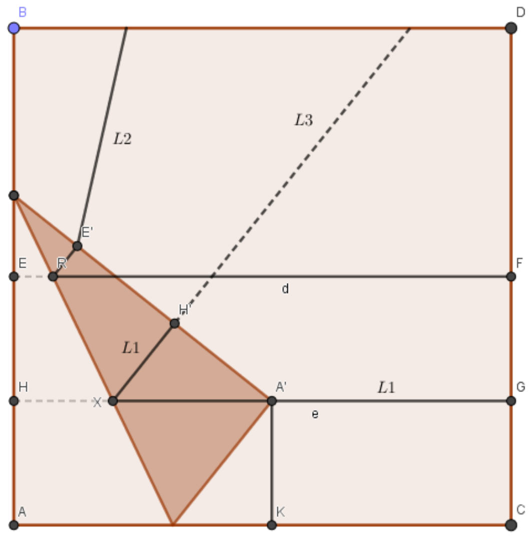
Tendo isso feito, faça uma outra dobradura que coloque o ponto A sobre a linha $L1$ e o ponto E sobre a linha $L2$ ao mesmo tempo, como na seguinte figura.



Por último, mantendo essa aba triangular dobrada, faça uma dobradura contendo o segmento XH ($L3$), que é um subconjunto de $L1$ que mudou de posição com a dobradura.



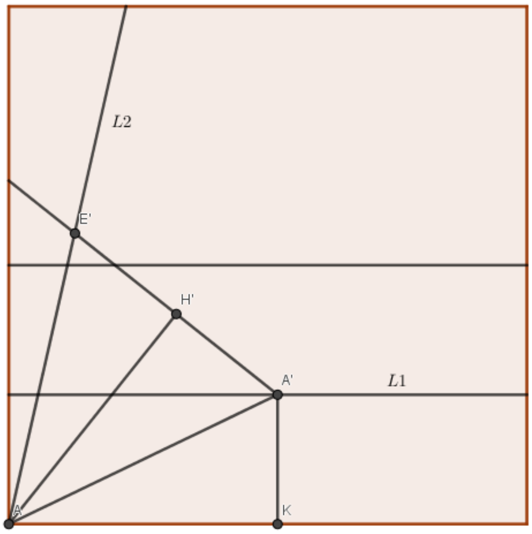
Seja K o pé da perpendicular ao segmento AC, que passa por A' (essa parte é apenas para auxiliar, não precisa ser feita com dobradura).



Pela imagem acima, parece que o ponto A pertence à reta $L3$. Para verificar esse fato, percebamos que $AX = A'X$, o que decorre da construção, uma vez que A' é a reflexão de A pela dobradura (lembrando que a reflexão em reta é uma transformação que preserva as medidas). Os ângulos $\angle HXA$ e $\angle H'XA'$ são congruentes pois, com o papel dobrado, eles se sobrepõem.

Desse modo, como esses ângulos são distintos, têm o mesmo vértice e são congruentes (com H, X e A' colineares), eles são opostos pelo vértice. Portanto, o vértice A está contido em $L3$.

Desfaçamos, agora, a dobradura. A imagem deverá ficar parecida com a figura abaixo, a menos de alguns elementos que removemos para não sobrecarregar a figura, mas estão mantidos os elementos necessários para a continuação do estudo.



Terminamos a construção: a reta AH' trissecta o ângulo θ!

Por quê? Justifique (Exercício).

Bibliografia

FROLINI, S. **Estudando geometria através de dobraduras.** 2014. 77 f. Dissertação (Metrado) Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/108815. Acesso em: 20 out. 2019.

HAGA, K. **Origamics**: Mathematical Explorations through Paper Folding. Toh Tuck Link, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

HULL, T. C., **Project Origami**: Activities for Exploring Mathematics. 2nd edition, Wellesley, Massachusetts: CRC Press/AK Peters, 2012.

LANG, R. J. **Origami and geometric constructions**, 2010. Disponível em: https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf . Acesso em 20 out. 2019.

MONTEIRO, L. C. N. Origami: **História de uma Geometria Axiomática**. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 2012.

WAGNER, E. **Construções Geométricas.** 6ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 108 p.