Mostra do CAEM 2019

17 a 19 de Outubro, IME-USP

Oficina 3

A cadeira de noiva

Prof. Dr. Sergio Alves
Instituto de Matemática e Estatística (IME−USP)
salves@ime.usp.br

RESUMO: Em sua famosa obra "Os Elementos", Euclides prova o teorema de Pitágoras relacionando as áreas dos quadrados construídos externamente sobre os lados do triângulo retângulo. Essa configuração geométrica é chamada, segundo o historiador C. Boyer, cadeira de noiva, supostamente porque lembra a cadeira em que as noivas orientais eram transportadas nas costas de um escravo para a cerimônia matrimonial. A prova dada por Euclides é apenas a "ponta do iceberg" de uma série de resultados surpreendentes que podem ser obtidos a partir dessa configuração. O principal objetivo da oficina é apresentar ao participante, por meio de uma geometria básica, algumas dessas pérolas.

Sergio Alves

IME - USP

Extraida de Boyer, Carl Benjamin, (1906 – 1976), *História da Matemática* – p. 80

A CADEIRA DE NOIVA

MOSTRA DO CAEM – 2019

Sergio Alves

IME - USP

Prova do teorema de Pitágoras – Euclides

$\Delta BEA \cong \Delta BCD$

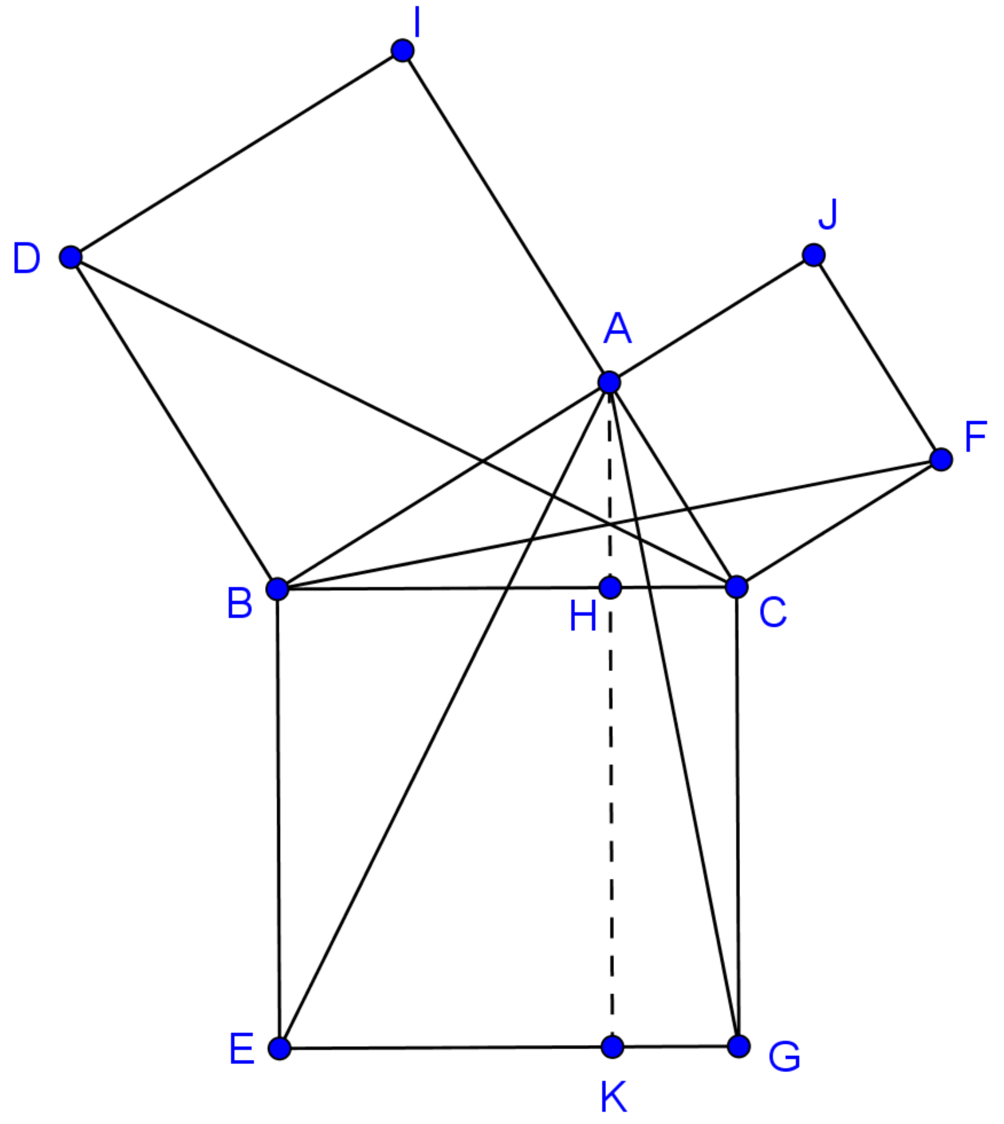
$\text{área}(\Delta BEA) = \frac{1}{2}\, \text{área}(\square BHKE)$

$\text{área}(\Delta BCD) = \frac{1}{2}\, \text{área}(\square ABDI)$

$\text{área}(\square BHKE) = \text{área}(\square ABDI)$

$\Delta CGA \cong \Delta CBF$

$\text{área}(\square CHKG) = \text{área}(\square ACFJ)$



Sergio Alves
IME - USP

Prova do teorema de Pitágoras – Leonardo da Vinci

$\Delta ABC \cong \Delta IJH$

$\acute{a}rea(ABHIJC) = \acute{a}rea(\square BCJH) + 2\acute{a}rea(\Delta ABC)$

$\acute{a}rea(GBCDEF) = \acute{a}rea(\square ABGF) + \acute{a}rea(\square CAED) +$

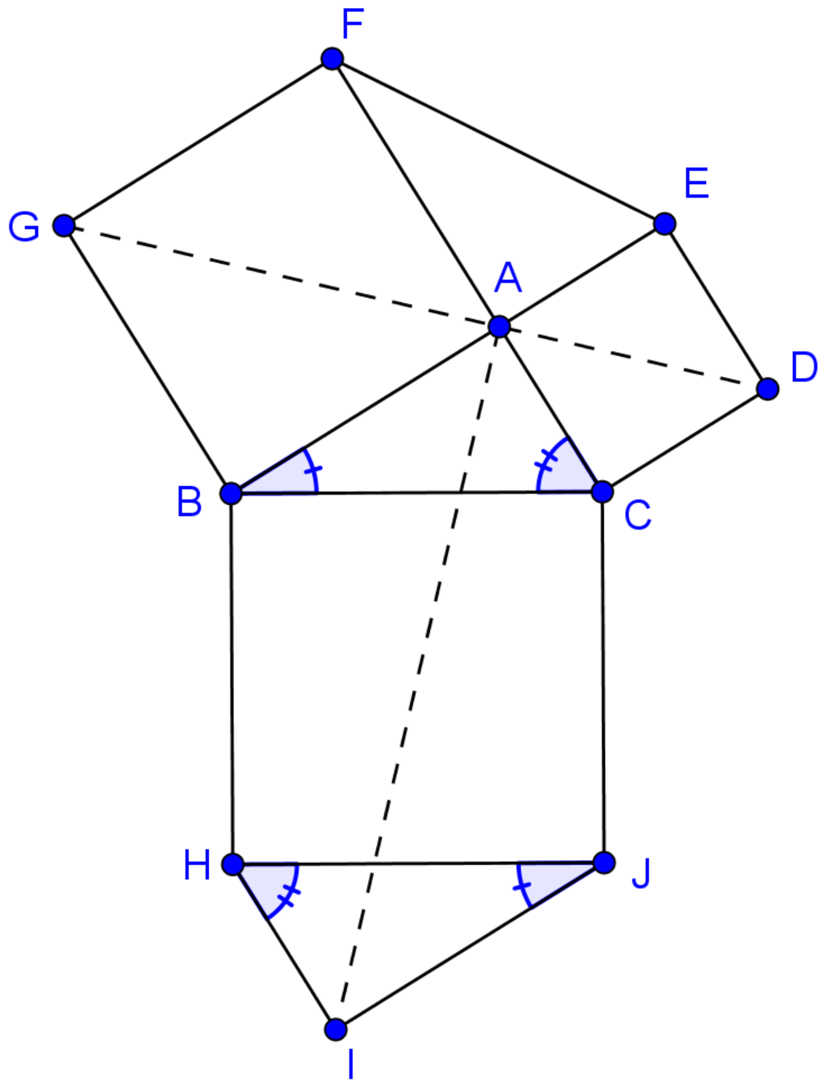
$+ 2\acute{a}rea(\Delta ABC)$

$\acute{a}rea(\square ABHI) = \acute{a}rea(\square GBCD)$

$\acute{a}rea(\square IJCA) = \acute{a}rea(\square GBCD)$

$\acute{a}rea(ABHIJC) = \acute{a}rea(\square ABHI) + \acute{a}rea(\square IJCA) =$

$= 2\acute{a}rea(\square GBCD) = \acute{a}rea(GBCDEF)$



Sergio Alves

IME - USP

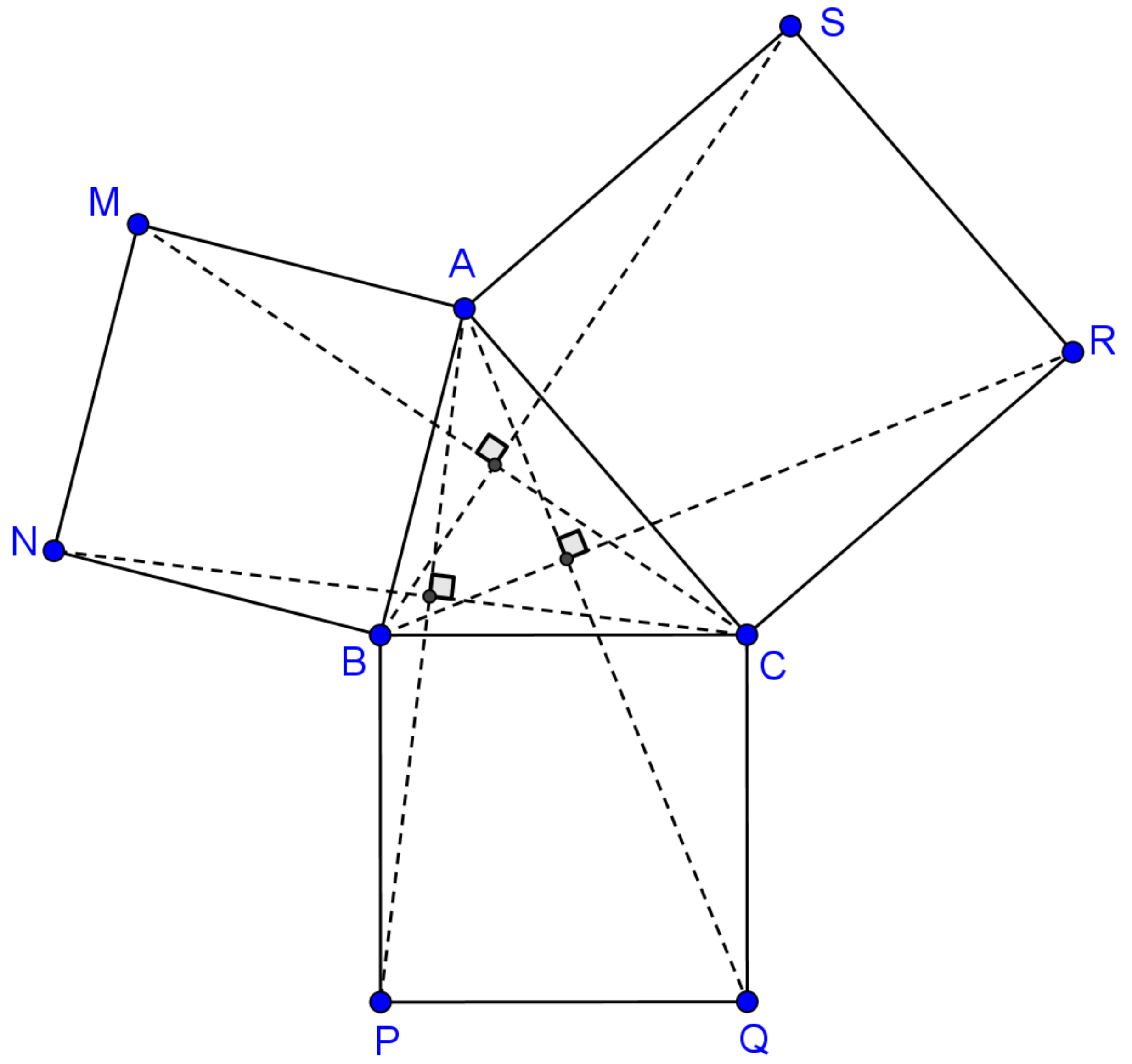
Generalizações

triângulo arbitrário ABC

$\overline{MC} \cong \overline{BS}$ e $\overleftrightarrow{MC} \perp \overleftrightarrow{BS}$

$\overline{PA} \cong \overline{CN}$ e $\overleftrightarrow{PA} \perp \overleftrightarrow{CN}$

$\overline{RB} \cong \overline{AQ}$ e $\overleftrightarrow{RB} \perp \overleftrightarrow{AQ}$



Sergio Alves

IME - USP

triângulo arbitrário ABC

paralelogramos MASA′, PBNB′ e RCQC′

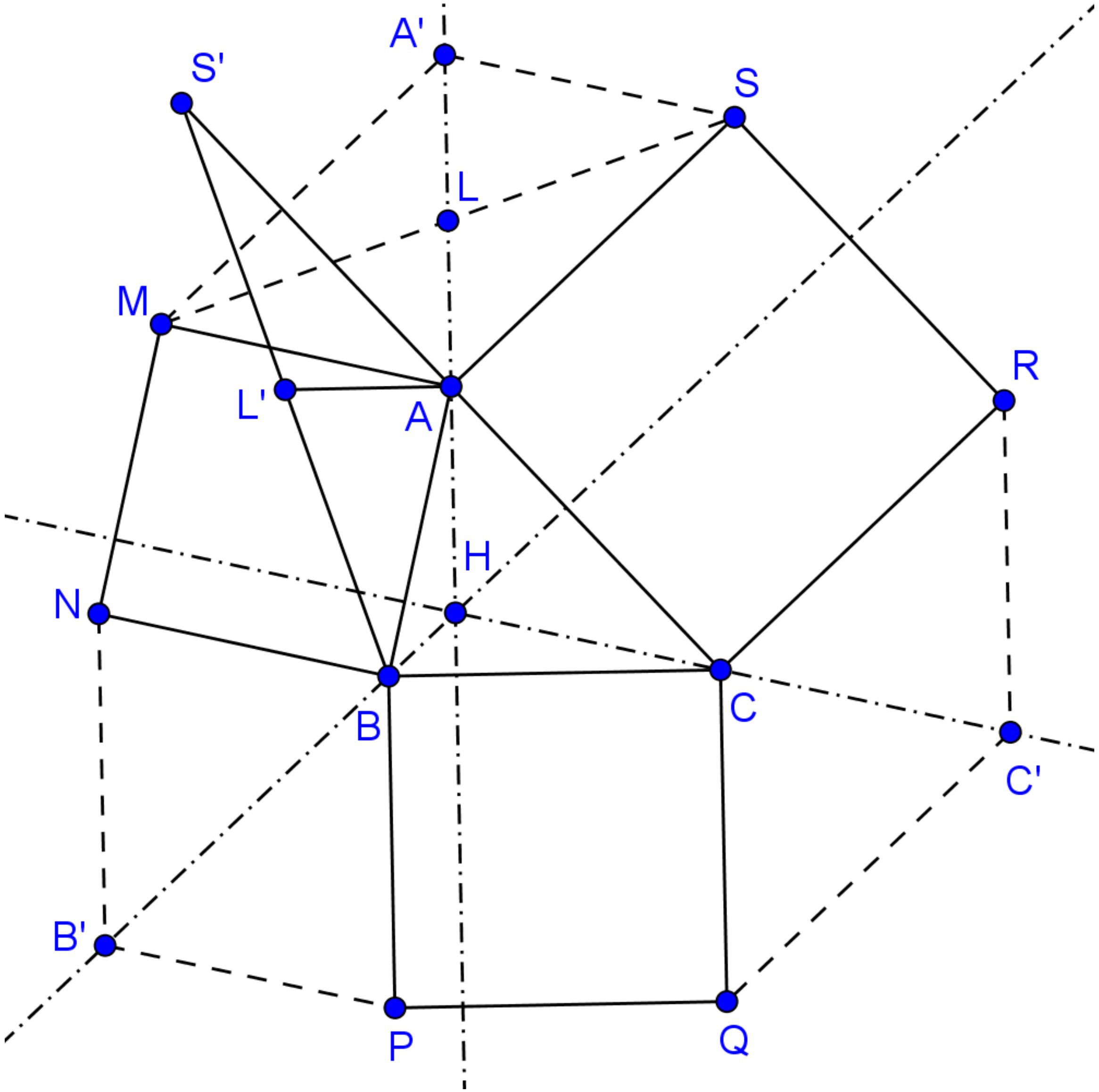
$\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{BB'} \perp \overleftrightarrow{CA}$

$\overleftrightarrow{CC'} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ *passam pelo ortocentro*

H do triângulo ABC



Sergio Alves

IME - USP

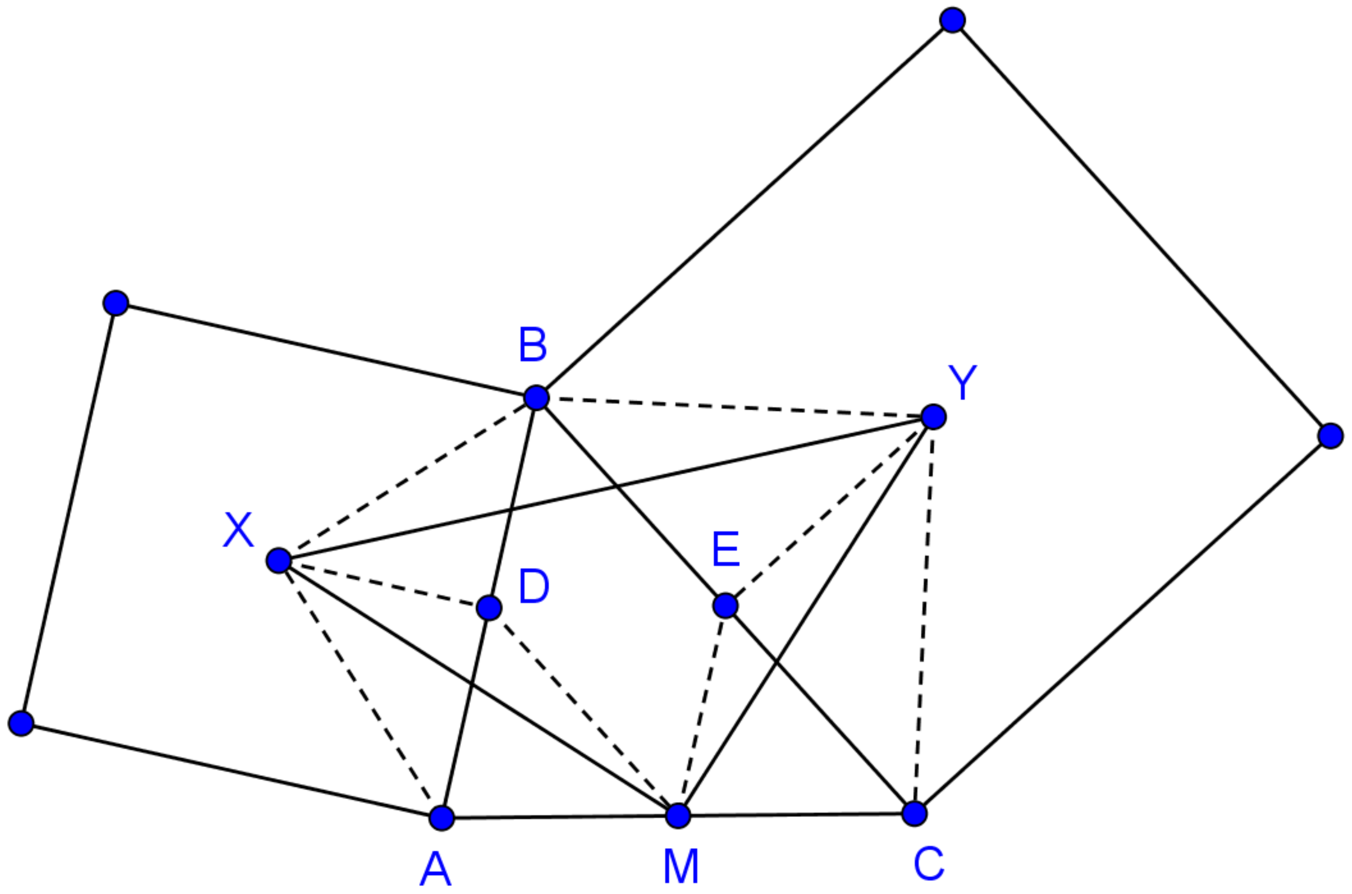
Jean-Baptiste Neuberg (1840 – 1926)

triângulo arbitrário ABC

M : ponto médio do segmento CA

X, Y : centros dos quadrados

$\overline{MX} \cong \overline{MY}$ *e* $\overleftrightarrow{MX} \perp \overleftrightarrow{MY}$



Sergio Alves

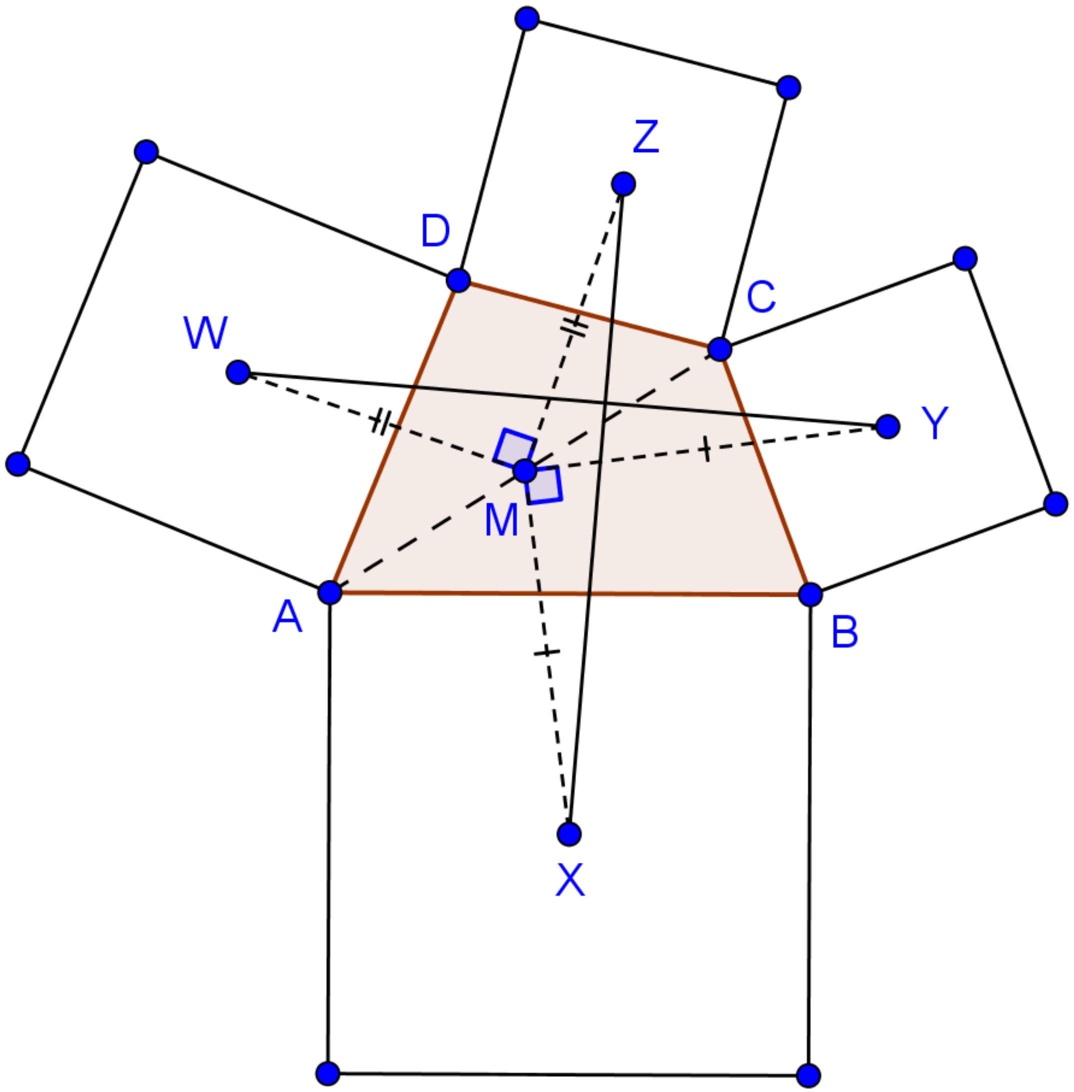
IME - USP

Henricus H. van Aubel (1830 – 1906)

quadrilátero arbitrário ABCD

X, Y, Z, W : centros dos quadrados

$\overline{XZ} \cong \overline{YW}$ e $\overleftrightarrow{XZ} \perp \overleftrightarrow{YW}$



Sergio Alves

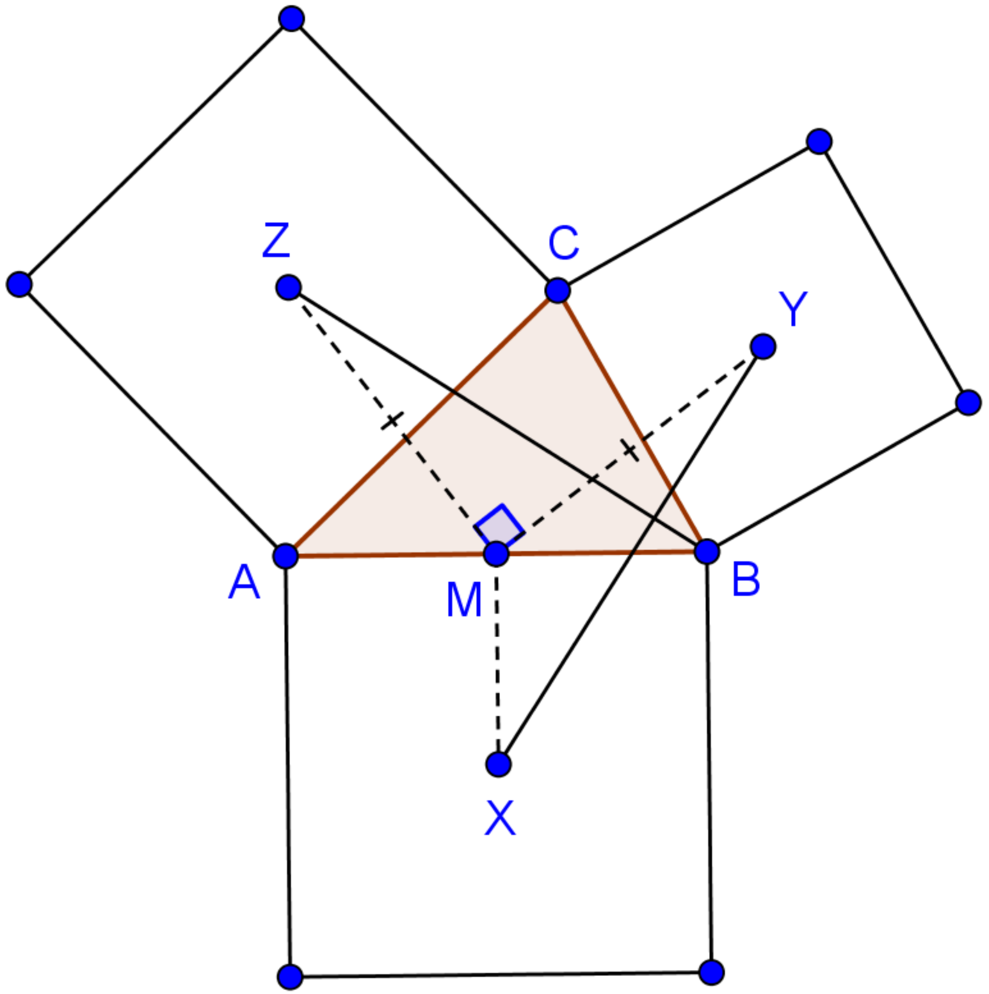
IME - USP

Henricus H. van Aubel (1830 – 1906)

triângulo arbitrário ABC

X, Y, Z : centros dos quadrados

$\overline{XY} \cong \overline{BZ}$ e $\overleftrightarrow{XY} \perp \overleftrightarrow{BZ}$



Sergio Alves

IME - USP

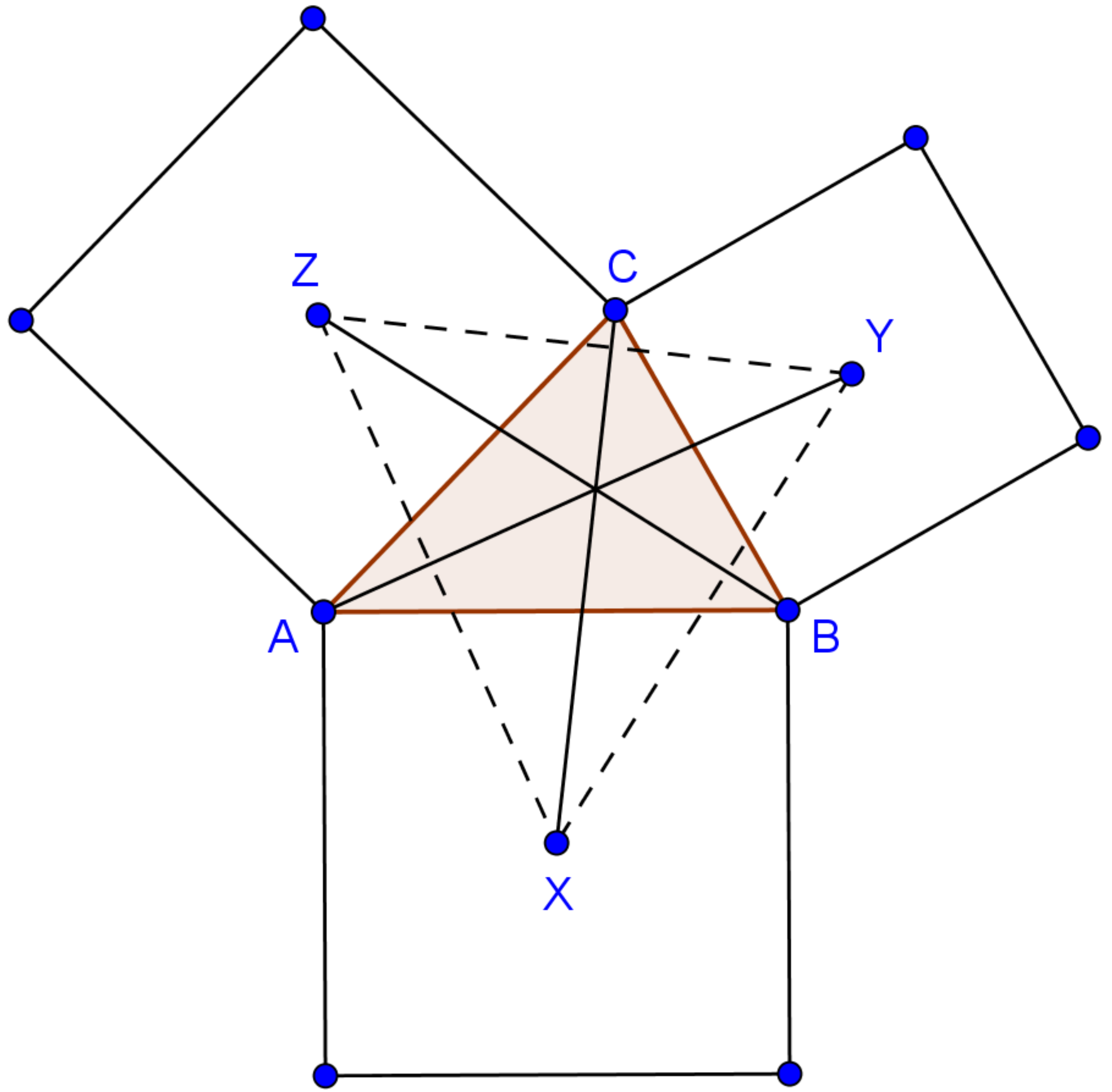
Ponto de Vecten – 1817

triângulo arbitrário ABC

X, Y, Z : centros dos quadrados

$\overleftrightarrow{AY}$, $\overleftrightarrow{BZ}$ *e* $\overleftrightarrow{CX}$ *são retas que se intersectam*

no ortocentro do triângulo XYZ



Sergio Alves

IME - USP

Ponto de Torricelli

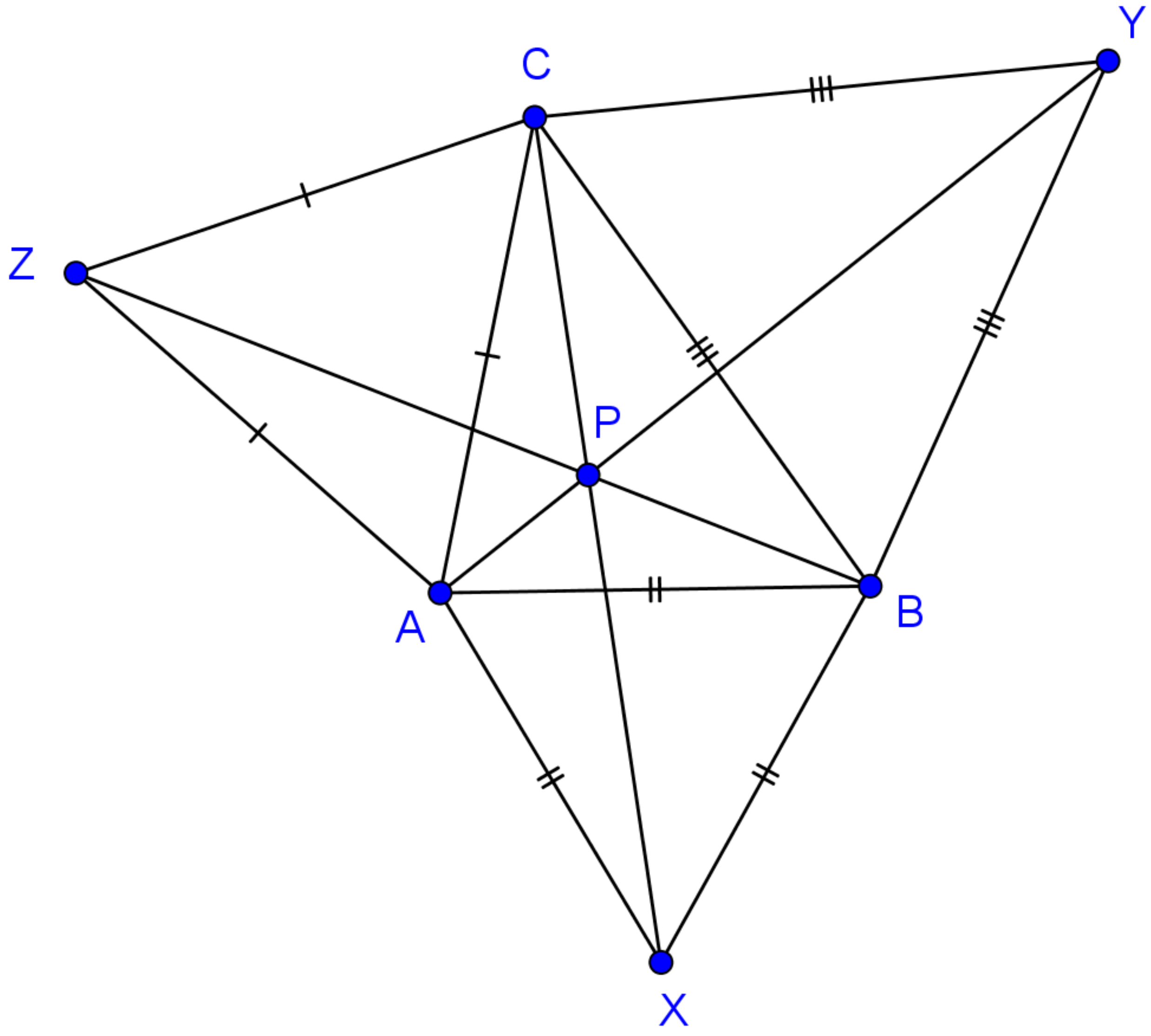
triângulo arbitrário ABC

X, Y, Z : vértices dos triângulos equiláteros

$\overleftrightarrow{AY}$, $\overleftrightarrow{BZ}$ e $\overleftrightarrow{CX}$ *são retas que se intersectam*

no ponto P

OBS: se cada ângulo do ΔABC tem medida menor que 120, P é o ponto de Fermat do triângulo



Sergio Alves

IME - USP

Friedrich W. Kiepert (1846 – 1934)

triângulo arbitrário ABC

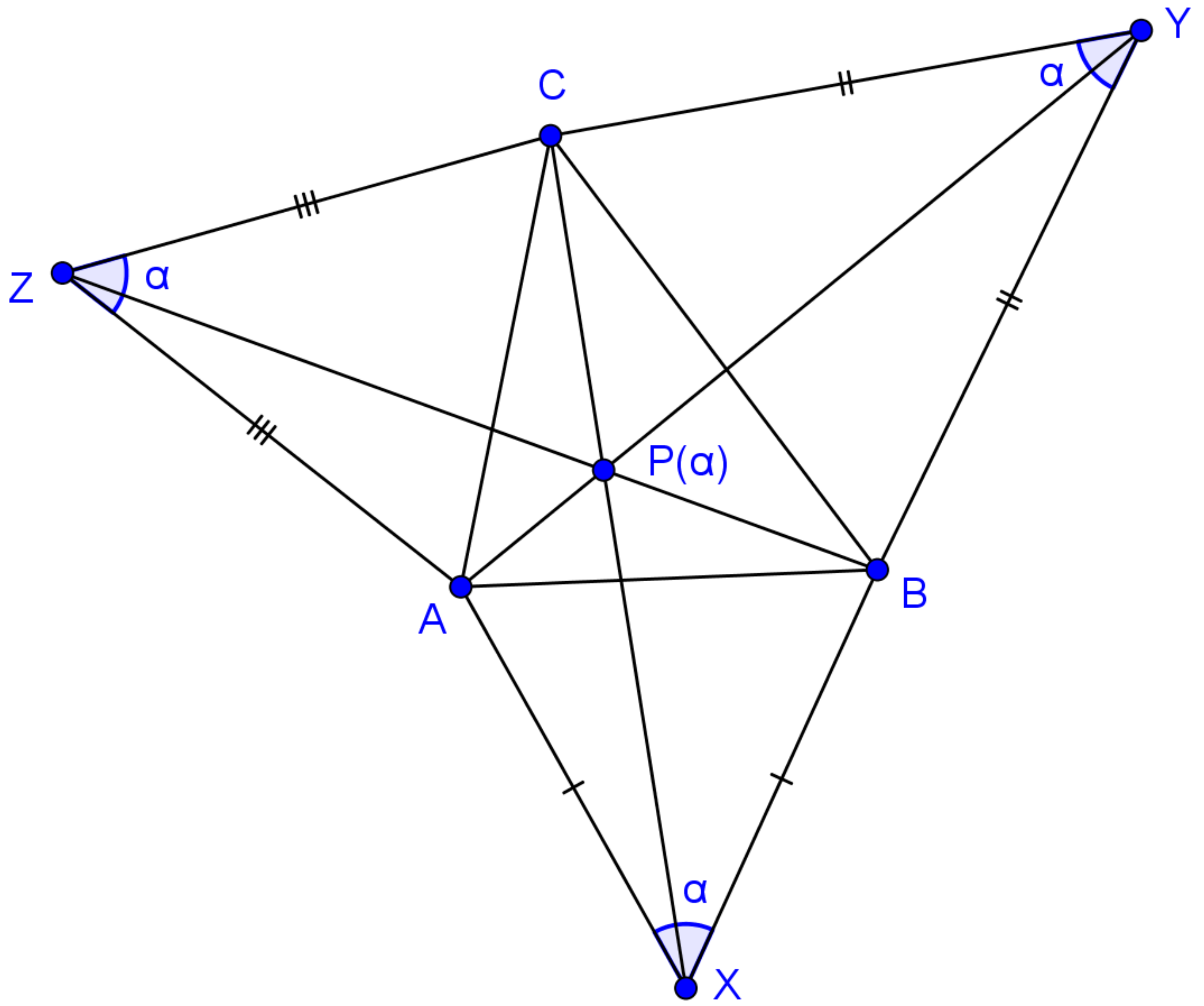
X, Y, Z : vértices dos triângulos isósceles

semelhantes $(0 < \alpha < 180)$

$\overleftrightarrow{AY}$, $\overleftrightarrow{BZ}$ e $\overleftrightarrow{CX}$ *são retas que se intersectam*

no ponto $P(\alpha)$

$P(\alpha)$ *descreve um arco de hipérbole* (!) *unindo o ortocentro e o baricentro do triângulo ABC*



Sergio Alves
IME - USP

salves@ime.usp.br

Obrigado!