



Centro de Aperfeiçoamento do
Ensino de Matemática
"João Affonso Pascarelli"

Mostra do CAEM 2017

19 a 21 de outubro, IME-USP

DO PLANEJAMENTO À ORQUESTRAÇÃO DE DISCUSSÕES MATEMÁTICAS DINÂMICAS PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Profa. Alexandra Pinheiro, Doutoranda da Universidade de Lisboa
(pinheiro.alexandra@gmail.com)

Resumo

Encorajar os alunos a partilharem, explicarem e justificarem os seus raciocínios ou a apresentarem as suas dúvidas ou dificuldades, bem como a questionarem os colegas e a pronunciarem-se sobre o que ouvem, é uma forma de promover a compreensão da Matemática. Nesse sentido, a discussão coletiva das ideias matemáticas assume uma relevância crescente para a aprendizagem. Porém, orquestrar uma discussão matemática é uma tarefa exigente, em que o papel do professor na moderação dessa discussão é difícil. Stein et al. (2009) apresentam um modelo que pode ser útil na orquestração dessas discussões coletivas, em que o ponto de partidas são tarefas desafiadoras, que incentivam o pensamento, o raciocínio e a resolução de problemas. Nesta comunicação, pretende-se apresentar esse modelo, acompanhado de exemplos, que compreendem o que as autoras designam por cinco práticas, que vai desde o planeamento até à discussão e síntese final da atividade matemática desenvolvida.

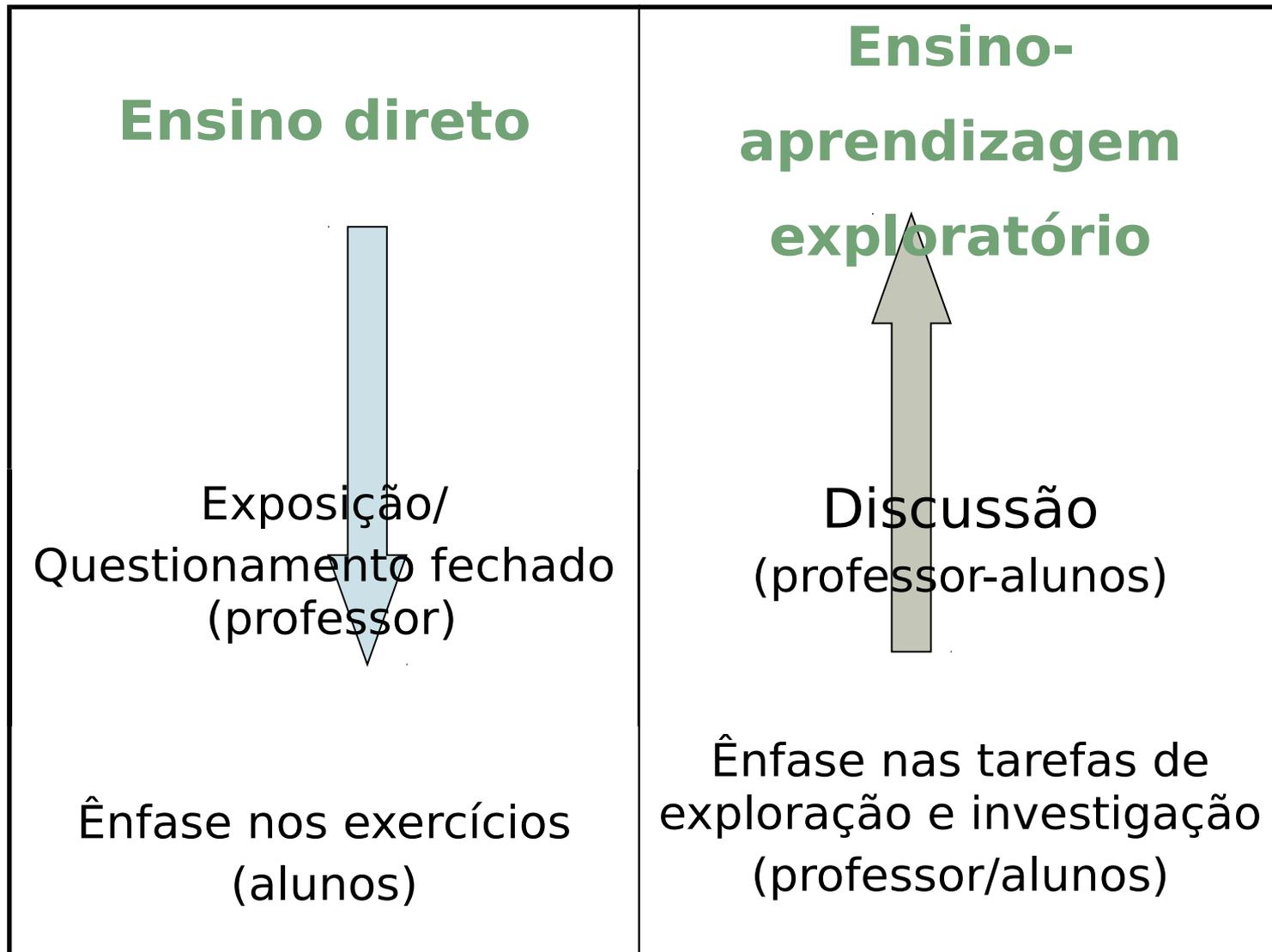
Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), pp. 313-340, 2008.



DO PLANEJAMENTO À ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Dinâmicas para a aprendizagem da Matemática

DUAS ABORDAGENS À APRENDIZAGEM (CONTEXTUALIZAÇÃO)



MOMENTOS DA AULA COM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Apresen-
-tação

Trabalho autónomo dos alunos

Discussão colectiva

Síntese
final

Apresentação da tarefa à sala

Objetivo principal: que os alunos se apropriem e envolvam na tarefa

Trabalho autónomo dos alunos

Objetivo principal: que os alunos realizem a tarefa

Discussão colectiva da turma

Objetivo principal: que a turma conheça e analise as produções matemáticas válidas resultantes da tarefa

Síntese final

Objetivo principal: que a turma sistematize as aprendizagens mais relevantes a partir da discussão



MOMENTOS DA AULA COM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Apresen-
-tação

Trabalho autónomo dos alunos

Discussão colectiva

Síntese
final

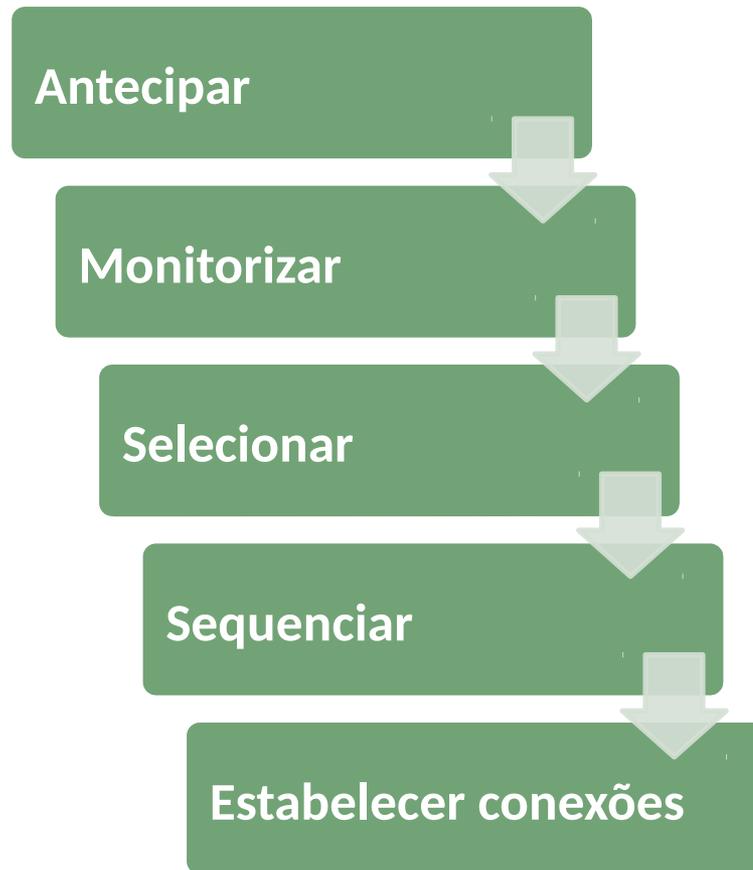
*Um desafio-chave que os professores de Matemática enfrentam ao concretizar as actuais reformas curriculares é a **orquestração das discussões matemáticas** em que se usam as respostas dos alunos às tarefas com o propósito de promover a aprendizagem matemática de toda a turma (e.g., Ball, 1993; Lampert, 2001).*

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008, p.314)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

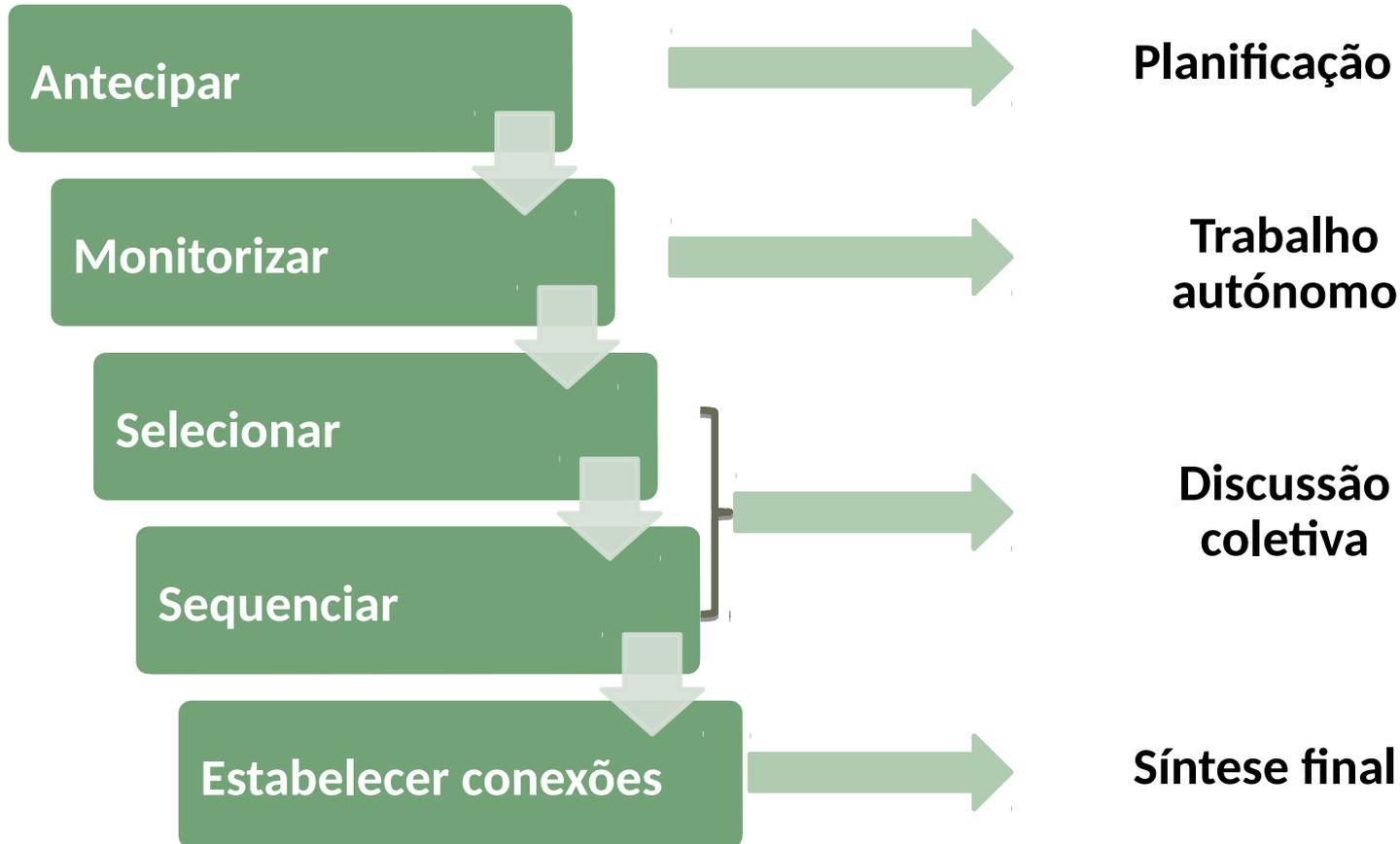
Cinco práticas do professor:



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Cinco práticas do professor:

Momentos de aula:



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Antecipar

Ao planificar, os professores podem antecipar as contribuições dos alunos, preparar as eventuais respostas a dar-lhes, e tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações dos alunos de modo a cumprir a agenda matemática da aula.

Antecipar corresponde a fazer um esforço de previsão de como os alunos irão abordar as tarefas que o professor lhes coloca

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Antecipar

- Adquirir confiança com a matemática da tarefa
- Precaver situações imprevistas
- Explorar todo o potencial da tarefa
- Desenvolver expectativas sobre a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa
- Elencar uma diversidade de estratégias – correctas e incorrectas – que os alunos poderão fazer com diferentes graus de sofisticação
- Relacionar essas interpretações e estratégias com os conceitos, representações, procedimentos, práticas, ... que o professor quer que eles aprendam



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Antecipar

- **A soma das diagonais dos quadrados de 2×2 são pares (porque somas de dois pares ou de dois ímpares)**
- **A soma das diagonais dos quadrados de 3×3 são pares ou ímpares, consoante é ímpar ou par o primeiro elemento do quadrado (porque são obtidas de ímpar + par + ímpar = par, ou obtidas de par + ímpar + par = ímpar.)**



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Monitorizar

O objectivo da monitorização é identificar o potencial para a aprendizagem das estratégias ou representações usadas pelos alunos (no trabalho autónomo)... mais do que verificar se os alunos estão a trabalhar ou parecem alheados da tarefa, os professores devem observar as ideias matemáticas que surgem e estão a ser trabalhadas, indo ao encontro do que eles pensam.

- Observar e ouvir os alunos/grupos
- Avaliar a validade matemática das suas ideias e respostas
- Interpretar e dar sentido ao pensamento matemático dos alunos mesmo que pareça estranho, ir ao seu encontro

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Selecionar

Ao monitorizar, o professor consegue identificar os alunos/grupos cujas respostas são importantes para partilhar com toda a turma na fase de discussão de modo a proporcionar uma diversidade de “peças matemáticas” adequadas ao propósito matemático da aula...

Em vez de deixar a turma e o professor à mercê das estratégias que os alunos que se voluntariam apresentam, a selecção criteriosa dos apresentadores proporciona que as ideias matemáticas importantes sejam discutidas pela turma.

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Selecionar

- Resposta da maioria/minoria com interesse
- Resposta com erro recorrente
- Respostas com diferentes graus de sofisticação
- Respostas com estratégias diferentes
-

- Seleccionar o que se quer entre os voluntários ou solicitar aluno(s)/grupo(s) particular(es)
- Nem sempre todos apresentam. Tentar rodar...



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Selecionar

“Num quadrado de 2X2, se adicionarmos nas diagonais, dá sempre um número par e num quadrado de 3X3, se somarmos nas diagonais, dá-nos sempre ímpar”.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

exemplos:

$$1+7=8 \text{ e } 6+2=8$$

$$2+8=10 \text{ e } 7+3=10$$

$$13+19=32 \text{ e } 18+14=32$$

$$1 + 7 + 13 = 21 \text{ e } 3 + 7 + 11 = 21$$

“A soma de cada diagonal principal dá o mesmo número e a soma da coluna do meio (terceira coluna) também dá (65)”.

	3	4	5	65
	8	9	10	
	13	14	15	
	18	19	20	
	23	24	25	65

$$1+25=21+5;$$

$$7+19=17+9$$

o 13 é comum às duas diagonais.

“Nas diagonais traçadas de cima para baixo e da direita para a esquerda, ao passar de uma linha para a outra a seguir, acrescentamos 4 ao número anterior. Temos que andar quatro casas, porque o quadro tem cinco colunas e o número da diagonal é sempre mais quatro que a que estamos”

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

exemplos:

$$5 + 4 = 9$$

$$19 + 4 = 23$$

4. O algarismo das unidades na 1ª coluna obedece ao padrão 1,6;1,6...
 5. O algarismo das unidades na 2ª coluna obedece ao padrão 2,7;2,7...
 6. O algarismo das unidades na 3ª coluna obedece ao padrão 3,8;3,8...
 7. O algarismo das unidades na 4ª coluna obedece ao padrão 4,9;4,9...
 8. O algarismo das unidades na 5ª coluna obedece ao padrão 5,0;5,0...
 O quadrado do canto superior esquerdo, composto por 4 quadrados, se somarmos os números dá 16.

“na coluna 5, é como se fosse a tabuada do 5: 5, 10, 15, ...”

ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Sequenciar

Ao tomar decisões ponderadas acerca da ordem pela qual se dá a apresentação e partilha dos trabalhos dos alunos, os professores podem maximizar as hipóteses de que os seus objectivos matemáticos com a discussão sejam alcançados.

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Sequenciar

- Começar com resposta que ajude a tornar a discussão mais acessível a todos os alunos
 - Resposta da maioria dos alunos?
 - Resposta particular de estratégia fácil de entender?
- Começar com resposta baseada em erro frequente para clarificação

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)

- Caminhar do mais informal para o mais formal a nível das representações
- Caminhar para o que permite generalizar ideias



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Sequenciar

Porque revela regularidades mais simples e estruturantes

1

4. O algarismo das unidades na 1ª coluna obedece ao padrão 1,6;1,6...
5. O algarismo das unidades na 2ª coluna obedece ao padrão 2,7;2,7...
6. O algarismo das unidades na 3ª coluna obedece ao padrão 3,8;3,8...
7. O algarismo das unidades na 4ª coluna obedece ao padrão 4,9;4,9...
8. O algarismo das unidades na 5ª coluna obedece ao padrão 5,0;5,0...
9. No quadrado do canto superior esquerdo, compostos por 4 quadradinhos se somarmos os números da 16.

Porque revela regularidades na sequência da anterior, ainda pouco sofisticadas mas que pedem justificação

2

“Nas diagonais traçadas de cima para baixo e da direita para a esquerda, ao passar de uma linha para a outra a seguir, acrescentamos 4 ao número anterior. Temos que andar quatro casas, porque o quadro tem cinco colunas e o número da diagonal é sempre mais quatro que a que estamos”

exemplos:

$$5 + 4 = 9$$

$$19 + 4 = 23$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Sequenciar

Porque incide em regularidade mais particular, que estabelece relações mais sofisticadas

3

“A soma de cada diagonal principal dá o mesmo número e a soma da coluna do meio (terceira coluna) também dá (65)”.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

65

$$1+25=21+5;$$

$$7+19=17+9$$

o 13 é comum às duas diagonais.

65

Porque se foca na regularidade que permite generalizar a propriedade importante dos números prevista pela professora e, além disso, força a necessidade de justificar as regularidades para garantir a sua validade

4

“Num quadrado de 2×2 , se adicionarmos nas diagonais, dá sempre um número par e num quadrado de 3×3 , se somarmos nas diagonais, dá-nos sempre ímpar”.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

exemplos:

$$1+7=8 \text{ e } 6+2=8$$

$$2+8=10 \text{ e } 7+3=10$$

$$13+19=32 \text{ e } 18+14=32$$

$$1 + 7 + 13 = 21 \text{ e } 3 + 7 + 11 = 21$$

ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Em vez de realizar uma sequência de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa, o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de ideias matemáticas poderosas.

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

- Analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas:
 - O que é parecido nas diferentes resoluções apresentadas?
 - O que é diferente nas diferentes resoluções apresentadas?
 - Quais as mais valias/potencialidades das diferentes resoluções?
- Propôr extensões da tarefa
- Retirar heurísticas para tarefas futuras

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Objetivos diversos

- Desenvolver capacidades transversais (de resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação)
- Desenvolver capacidades mais específicas (de representar, demonstrar, modelar, estimar...)
- Institucionalizar conhecimento matemático novo (conceito, propriedade, procedimento,...)



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Objetivos diversos

Desenvolver capacidades transversais (de resolução de problemas, **raciocínio matemático, comunicação**)

“Nas diagonais traçadas de cima para baixo e da direita para a esquerda, ao passar de uma linha para a outra a seguir, acrescentamos 4 ao número anterior. Temos que andar quatro casas, porque o quadro tem cinco colunas e o número da diagonal é sempre mais quatro que a que estamos”

exemplos:

$$5 + 4 = 9$$

$$19 + 4 = 23$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Como expressar essa conclusão sem ser com exemplos?
Conseguimos uma maneira que dê para todos os casos?

$$\text{Número} + 5 - 1 = \text{Número} + 4$$

ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Objetivos diversos

Desenvolver capacidades mais específicas (de representar, **justificar**, **demonstrar**, modelar, estimar...)

“Num quadrado de 2X2, se adicionarmos nas diagonais, dá sempre um número par e num quadrado de 3X3, se somarmos nas diagonais, dá-nos sempre ímpar”.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

exemplos:

$$1+7=8 \text{ e } 6+2=8$$

$$2+8=10 \text{ e } 7+3=10$$

$$13+19=32 \text{ e } 18+14=32$$

$$1 + 7 + 13 = 21 \text{ e } 3 + 7 + 11 = 21$$

Será sempre par a soma das diagonais dos quadrados de 2 x 2 ?
Será sempre ímpar a soma das diagonais dos quadrados de 3 x 3 ?
Experimentar com mais casos... só um é pouco para fazer uma afirmação dessas... Têm a certeza?



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Objetivos diversos

Propriedade dos números naturais

Desenvolver capacidades mais específicas (de representar, **justificar**, **demonstrar**, modelar, estimar...)

“Num quadrado de 2×2 , se adicionarmos nas diagonais, dá sempre um número par e num quadrado de 3×3 , se somarmos nas diagonais, dá-nos sempre ímpar”.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

exemplos:

$$1+7=8 \text{ e } 6+2=8$$

$$2+8=10 \text{ e } 7+3=10$$

$$13+19=32 \text{ e } 18+14=32$$

$$1 + 7 + 13 = 21 \text{ e } 3 + 7 + 11 = 21$$

Porque será que acontece?...

porque será que a soma é par nos casos dos quadrados de 2×2 ?...

Que tipos de números estamos a adicionar?

Podemos ter alguma conclusão geral?



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Estabelecer conexões

Objetivos diversos

Propriedade dos números naturais

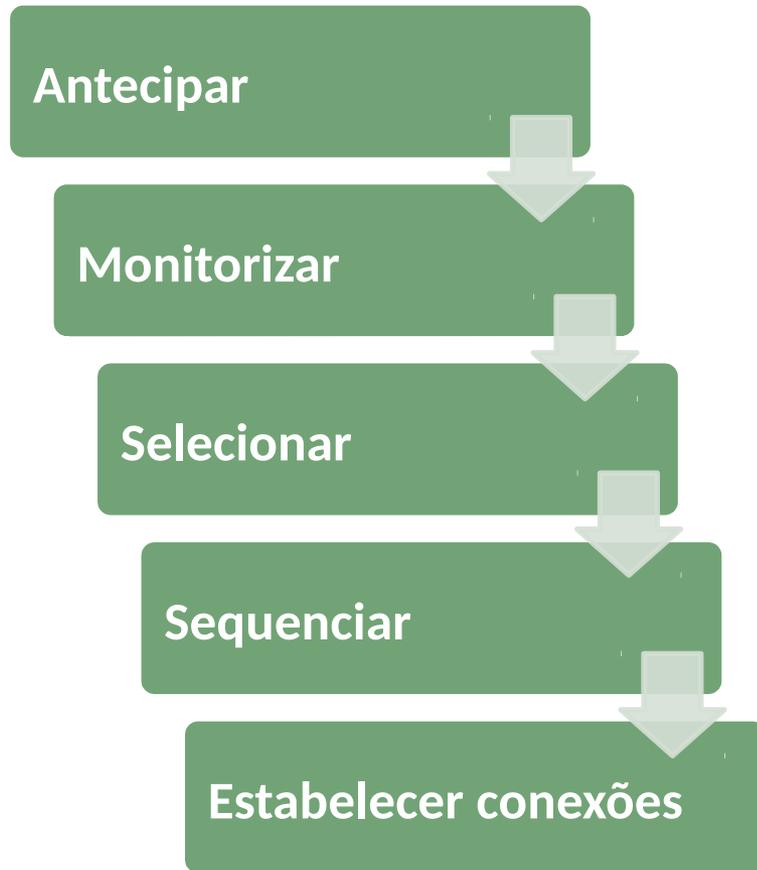
Institucionalizar conhecimento matemático novo (conceito, propriedade, procedimento,...)

Quadrado 2x2	Quadrado 3x3
$p+p=p$	$p+p+p=p$
$i+i=p$	$i+i+i=i$
	$p+i=i$
	$p+p=p$



ORQUESTRAÇÃO DAS DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Cinco práticas do professor:



**CADA PRÁTICA BENEFICIA DO
TRABALHO REALIZADO NA
PRÁTICA ANTERIOR**

Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008)



REFERÊNCIAS

- Canavarro, A. P. e Vicente, M. V. (2009). A experimentação do novo programa de Matemática: Reportagem no 3º ano em Évora. *Educação e Matemática*, nº 105.
- Pires, M. e Ferreira, R. (2009). A experimentação do Novo programa de Matemática: Reportagem no 7º ano no Porto. *Educação e Matemática*, nº 105.
- Stein, M., Smith, M.(2009).Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, nº 105.(versão original de 1989)
- Stein, M. , Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*,10(4), 313-340.



Obrigado!

Alexandra Pinheiro
pinheiro.alexandra@gmail.com

