Mostra do CAEM 2017

19 a 21 de outubro, IME-USP

OFICINA 7
O USO DE FRACTAIS NA SALA DE AULA POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Barbara Corominas Valério (barbarav@ime.usp.br)[1]

Resumo

Nesta oficina serão abordados alguns aspectos associados ao estudo dos fractais na escola básica. Temas relacionados à geometria métrica, progressões, uso e manipulação de tabelas, generalizações de padrões, entre outros podem ser trabalhados com o auxílio dos fractais que tem uma série de peculiaridades que despertam a curiosidade. O tema será abordado por meio de atividades investigativas.

Palavras-chave

Geometria Fractal; fractais na sala de aula; atividades investigativas.

1. Introdução

Desde 2009, ocasião em que tive a oportunidade de estudar a Geometria Fractal, me convenci que o uso de exemplos de fractais em sala de aula poderia ser um instrumento importante ao propor situações didáticas que tivessem significado aos alunos.

Ao analisar atividades envolvendo fractais, percebe-se que é possível propor situações contextualizadas, desafiadoras e que propiciam o desenvolvimento do

[1] Professora Doutora do Instituto de Matemática e Estatística – IME-USP.

raciocínio lógico, da capacidade de argumentação e da criatividade, dentre outras habilidades.

Mais recentemente, lendo o livro de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) onde o tema investigações matemáticas em sala de aula (próprio título da obra) é discutido, percebi que atividades envolvendo fractais podem ser naturalmente desenvolvidas de forma a promover em aula um ambiente de investigação matemática.

2. Objetivos

Nesta oficina, por meio das atividades que serão desenvolvidas, pretendo apresentar alguns conceitos básicos envolvendo o tema Fractais. Além disso, com a abordagem utilizada pretendo apresentar uma outra perspectiva de trabalho pedagógico com o uso de tarefas investigativas em sala de aula.

3. A teoria dos Fractais

As teorias envolvendo os Fractais remetem a Matemática produzida no século XX e é comum que alunos e professores de áreas relacionadas – Matemática, Física, Ciências da Computação, Engenharia – ouçam falar no tema, embora nem sempre tenham um conhecimento do que significa ser um fractal, como surgiram ou mesmo qual sua importância. Geralmente o que se conhece é alguns poucos exemplos, que poderiam ser chamados de clássicos, dado a sua recorrência e, por que não dizer, sua importância, muitas vezes também desconhecida.

Os fractais aparecem na natureza e na teoria abstrata, na modelagem de problemas e também com fins artísticos. É importante observar que os exemplos clássicos, em sua maioria, surgiram com a resolução de problemas teóricos internos à Matemática e apenas depois se passou a relacioná-los com a natureza e com as artes.

É possível reconhecer um fractal quando se conhece algumas de suas características intrínsecas, a saber, complexidade infinita, autossimilaridade e a dimensão fractal. O foco desta oficina será o estudo da complexidade infinita, no entanto gostaria de observar que com o mesmo espírito é possível desenvolver atividades para se trabalhar os conceitos de autossimilaridade e de dimensão fractal. Outro ponto de interesse será delimitar e entender as fronteiras entre a Geometria

Fractal – que se origina com o estudo das características citadas – e a Geometria Euclidiana, ponto de partida natural para todo conhecimento geométrico.

3.1 Entendendo a essência dos fractais por meio de exemplos clássicos

O ponto de partida para discutir as propriedades singulares dos fractais são três dos mais importantes exemplos, entretanto e novamente, é muito importante frisar que quando estes conjuntos foram propostos tinham outros objetivos – note que no contexto matemático do final do século XIX e primeiras décadas do século seguinte o conceito de fractal ainda não existia e os conjuntos que agora se apresentam eram tratados separadamente – será apenas após os trabalhos de B. Mandelbrot (1924) que surgem as ferramentas necessárias para tratá-los dentro do escopo de uma mesma teoria.

Conjunto de Cantor (1883)

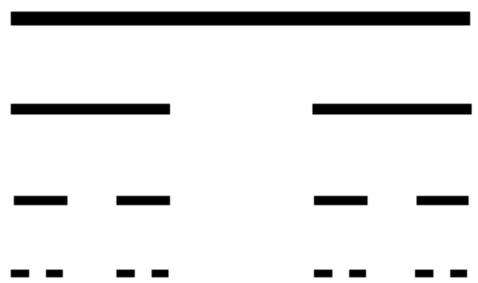

Fig. 1 – Conj. de Cantor (4 iterações)

Proposto pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) como um exemplo de conjunto não-enumerável [2] com medida nula – demonstrando assim que o fato da quantidade de pontos crescer de forma gigantesca não se associa diretamente com a mensuração do mesmo. Sua construção, por recursão, consiste em dividir o intervalo [0,1] (Fig. 1: primeira imagem de cima para baixo) em três partes iguais e desconsiderar o terço médio, isto é, o intervalo$]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ (Fig. 1: segunda imagem). Em seguida, repete-se esse algoritmo para os dois intervalos restantes, $[0,\frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ (Fig. 1: terceira imagem), repetindo este processo etapa a etapa, infinitamente. O conjunto C obtido após *infinitas iterações* é o que se chama Conjunto de Cantor ou ainda Poeira de Cantor.

[2] Por conjunto não-enumerável entende-se um conjunto que não pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais (que tem por natureza intrínseca enumerar).

Curva de Peano (1890)

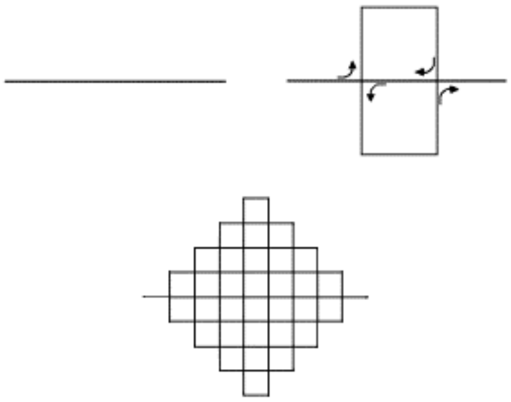

Fig. 2 – Curva de Peano (3 iterações).

Proposta pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), essa curva tem a interessante propriedade de cobrir uma área equivalente ao do quadrado que possui por diagonal justamente o segmento inicial utilizado em sua construção. Novamente a divisão do segmento é por três, resultando em nove segmentos congruentes dispostos de maneira a formar dois quadrados.

A próxima iteração é obtida por recursão e assim sucessivamente, isto é, aplicando o algoritmo básico a cada novo segmento que surge, iteração a iteração. O que recebe o nome de Curva de Peano é a curva obtida ao levar esse processo *ao infinito*. Quando de sua proposição, Peano visava mostrar uma curva que servisse para cobrir a superfície de um quadrado, notando ainda o fato peculiar de que tal curva tem um comprimento infinito, enquanto a área coberta pela mesma é finita. Tais características justificam – conforme cálculos que serão feitos adiante – o fato incomum entre os fractais de que a dimensão fractal dessa curva resulta em um número inteiro (bidimensional, como o quadrado).

Curva de Koch (1904)

Famosa pela propriedade de ser contínua e não-derivável em todos os seus pontos, foi proposta pelo matemático sueco Helge Von Koch (1870-1924). Mais uma construção baseada na divisão de um segmento inicial em três partes iguais, substituindo o terço médio por um triângulo equilátero sem a base – a figura ao lado representa apenas as três primeiras iterações, o fractal é obtido apenas após *infinitas interações.*

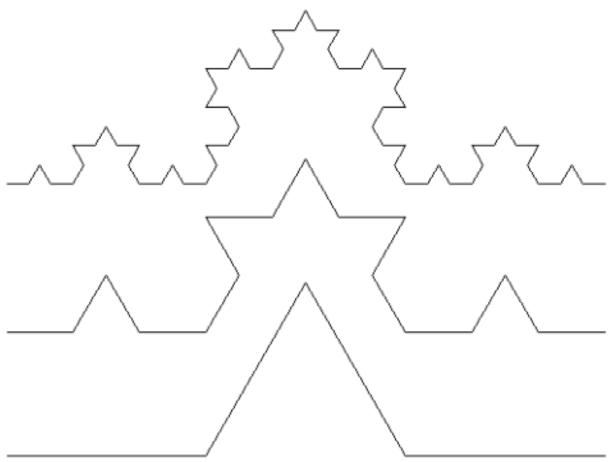

Fig. 3 – Curva de Koch (3 iterações).

3.2 Dificuldades para uma definição de fractal

É indiscutível que estes e outros precursores, quando o assunto é exemplos de fractais, desempenharam grande importância para que adiante, a partir das características comuns de tais conjuntos, aparecessem as primeiras tentativas de definição formal para esse conceito. O próprio Mandelbrot estudou estes e outros exemplos e propôs uma definição baseada em conceitos avançados de Dimensão e Topologia. Todavia, pouco tempo depois, percebeu-se que tal definição excluía formas geométricas que a intuição e, em alguns casos, a necessidade apontavam como fractais. A isso se seguiu novas tentativas, e de alguma forma novas exclusões ou dificuldades. Neste texto adota-se o ponto de vista de Falconer (1990), segundo o qual se pode olhar para a definição de fractal de forma análoga a definição de vida dentro da Biologia. Sabe-se que determinado ser é vivo ou não por meio de algumas funções básicas que se entende que todo ser vivo deva cumprir – algumas delas, nomeadamente, como nascer, reproduzir, morrer. Seguindo essa linha de raciocínio, Falconer propôs a seguinte lista de referência:

(i) é uma figura que apresenta uma estrutura refinada, com detalhes arbitrariamente pequenos;

(ii) apresenta muitas irregularidades, impossibilitando sua descrição por meio dos recursos da Geometria Euclidiana tanto pontual como globalmente;

(iii) apresenta autossimilaridade, mesmo que aproximada;

(iv) sua dimensão geralmente é não-inteira e de cálculo não trivial;

(v) sua definição apresenta algum tipo de raciocínio recursivo (infinitas iterações).

Observo que não é essencial que um determinado conjunto satisfaça a todas estas propriedades para ser considerado um fractal.

3.3 A complexidade Infinita

Como o foco das atividades desenvolvidas nesta oficina será o estudo da complexidade infinita, faremos a seguir algumas considerações sobre esta característica intrínseca.

Releia os três exemplos dados anteriormente. Perceba que propositalmente destacamos uma palavra ao explicar como é feita a construção dos conjuntos. Na construção de um fractal sempre aparece um processo recursivo que, aplicado à etapa anterior, permite passar à seguinte. E, conforme se frisou nos exemplos, tal recursão deve ser reproduzida infinitamente de forma a obter o fractal.

Essa última afirmação nos leva a algumas questões a respeito dos fractais. Uma delas diz respeito à existência de tais formas geométricas. Claramente tais formas não existem concretamente, na natureza, ou de forma que se possa “pegá-la”, o que existe são formas que podem ser modeladas e explicadas por meio dos fractais – utilizando para tanto aproximações, dadas por iterações finitas do processo recursivo. Com isso concluímos que um fractal nunca pode ser visto, apenas podemos imaginá-lo por meio de iterações suficientemente avançadas – trata-se do que chamamos de figura limite.

Temos então que um fractal pode ser pensado como o limite de uma sequência de conjuntos, justamente as iterações. Quando mais se avança nesta sequência, melhor se aproxima o fractal. É devido a essa necessidade de aproximação que os fractais possuem uma grande interface com métodos computacionais que permitem em pouco tempo iterações avançadas.

4. Descrição das Atividades

4.1 O Floco de Koch

Tal fractal, derivado da Curva de Koch, pode ser construído juntando-se convenientemente três etapas da curva que recebe o mesmo nome.

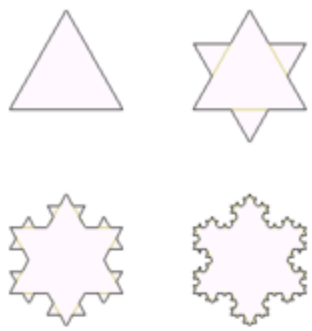

Fig. 4 – Floco de Koch (4 iterações)

Etapa 1 – Estudando o desenvolvimento do fractal mediante as iterações

(i) Preencha a seguinte tabela que relaciona o número de vértices e lados do Floco de Koch em função da iteração considerada:

Iteração	1	2	3	4
Vértices				
Lados				

(ii) Explique que raciocínio utilizou para determinar o número de vértices e de lados na quarta iteração, uma vez que não há uma figura para ajudar na contagem.

(iii) Utilize seus conhecimentos de Geometria Euclidiana para explicar o resultado obtido para as duas colunas da tabela anterior. Por que o número de vértices e o número de lados coincidem em cada iteração?

(iv) Considere apenas uma das Curvas de Koch envolvidas no Floco. Construa uma nova tabela que relacione o perímetro da curva em função das iterações – para tanto assuma que o segmento inicial mede uma unidade. Em seguida obtenha os mesmos dados para o Floco de Koch, explicando seu raciocínio.

(v) Qual a área de um triângulo equilátero de lado medindo uma unidade?

(vi) Qual a relação entre o número de lados em uma determinada iteração e o número de novos triângulos que aparecem na seguinte?

(vi) Agora, utilizando as respostas dadas para os dois itens anteriores, relacione em uma terceira tabela a área do Floco de Koch em cada uma das quatro iterações. Compare o perímetro e a área da curva. O que é possível dizer da velocidade de crescimento da área em função do perímetro em cada iteração?

Etapa 2 – Generalizando a n-ésima iteração

Baseado nas informações colhidas para as quatro primeiras iterações, generalize o número de vértices, número de lados, perímetro e área, preenchendo uma tabela como a sugerida abaixo, que inclui a n-ésima iteração:

Iteração	0	1	2	3	4	...	n
Vértices						...	
Lados						...	
Perímetro						...	
Área						...	

Etapa 3 – A figura limite

Utilizando a generalização feita acima, calcule:

(i) $\lim_{n\to\infty} V_n$, onde V_n é o número de vértices na n-ésima iteração.

(ii) $\lim_{n\to\infty} L_n$, onde L_n é o número de lados na n-ésima iteração.

(iii) $\lim_{n\to\infty} P_n$, onde P_n é o perímetro da curva na n-ésima iteração.

(iv) $\lim_{n\to\infty} A_n$, onde A_n é a área limitada pela curva na n-ésima iteração.

(v) Lembrando que o fractal, por ser uma figura limite, só existe devido a uma abstração, utilize sua imaginação para interpretar os resultados (i)-(iv). Compare, principalmente, (i)-(ii) e (iii)-(iv). O que você pode dizer sobre os valores encontrados? Existe algum resultado interessante?

4.2 O Triângulo de Sierpinski[3]

(i) Construção das iterações: utilizando a malha, ligue os pontos médios e considere apenas os triângulos que surgem nas pontas. Repetindo esse processo obtenha uma figura como a quarta – da esquerda para a direita – apresentada abaixo (Fig. 5).

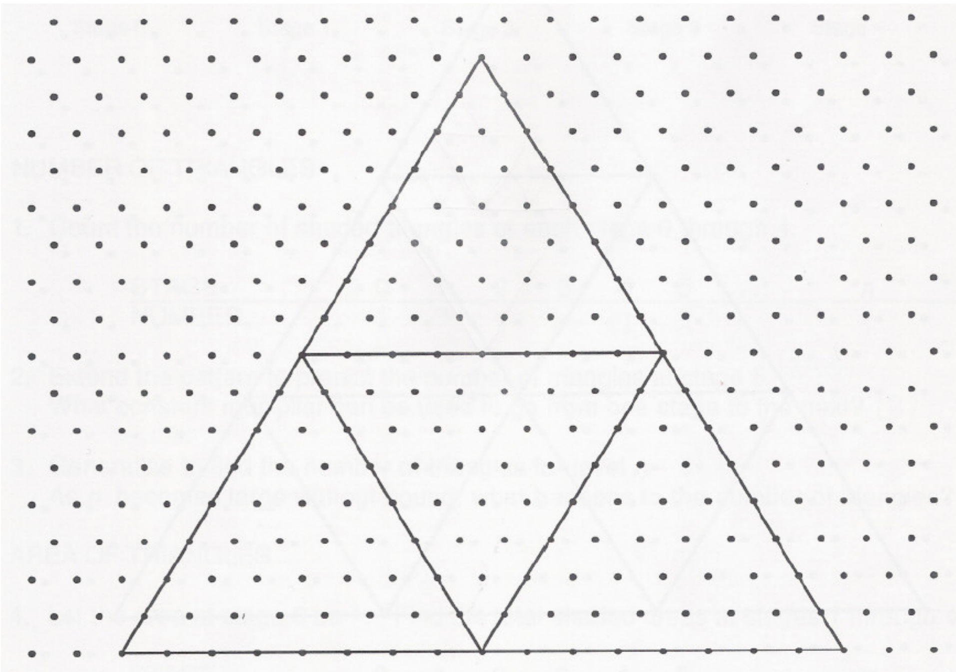

Fig. 5 – Malha para construção das iterações do Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski surge quando repetimos esse algoritmo infinitamente:

Fig. 6 – As 5 primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.

(ii) Relacione em uma tabela o número de triângulos pintados por iteração.

[3] Atividade adaptada e traduzida de PEITGEN, Heinz-Otto et al, 1999. pp. 11 e 13.

(iii) Analisando as informações da tabela é possível estabelecer um padrão que permita calcular o número de triângulos na sexta iteração. Tal padrão está baseado em qual constante e por quê?

(iv) O que ocorre com o número de triângulos conforme se avança mais nas iterações, ou seja, conforme n cresce indefinidamente? Descreva e em seguida expresse formalmente suas ideias utilizando da notação de limite e também de uma notação que expresse o número de triângulos em uma iteração arbitrária.

(v) Considere que a área do triângulo inicial é uma unidade de medida. Acrescente uma nova linha a sua tabela para expressar a área da figura em função da iteração. Em seguida analise o que ocorre com a área quando n cresce indefinidamente.

4.2 Fractais por dobradura e cortes

Nesta parte da oficina iremos construir um fractal usando dobraduras e cortes. Após a construção do mesmo, iremos em conjunto, propor questões para analisar o comportamento do fractal construído. Apenas para frisar, não iremos construir um fractal e sim uma aproximação do mesmo.

4. Considerações Finais

Espero que com esta oficina, os participantes tenham não só ampliado os seus conhecimentos sobre o tema Fractais, mas também tenham tido a oportunidade de discutir sobre o uso de atividades investigativas em sala de aula.

6. Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

FALCONER, Kenneth John. **Fractal Geometry**: Mathematical Foundations and Applications; John Wiley & Sons, 1990.

PEITGEN, Heinz-Otto et al. **Fractals for the Classroom**: Strategic Activities, Volume One. Springer-Verlag, New York, 1991.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 1ª. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.