Mostra do CAEM 2017

19 a 21 de outubro, IME - USP

NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA: ESSA MISTURA DÁ CERTO?

Sergio Alves (salves@ime.usp.br)

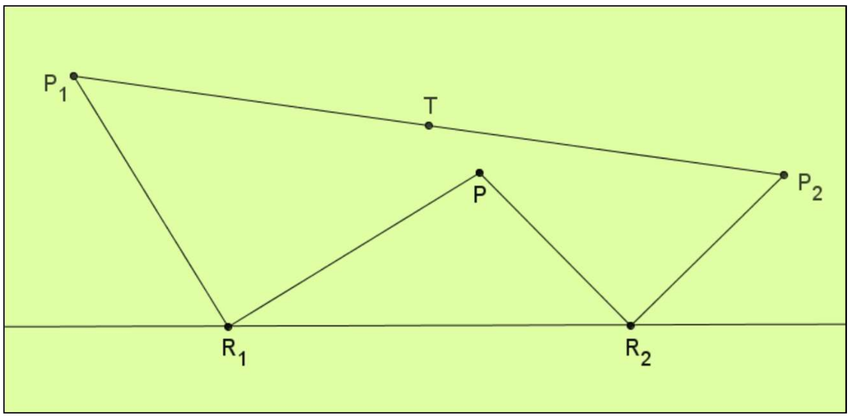
Resumo. Quando queremos resolver um problema de geometria, invariavelmente buscamos soluções recorrendo ou a métodos sintéticos ou à geometria analítica (via a introdução de coordenadas). Menos conhecida, e muitas vezes esquecida, é a utilização de números complexos e suas propriedades na resolução de problemas geométricos. Nesta oficina pretendemos explorar essa associação em diversos problemas clássicos constatando como o uso dos números complexos leva a soluções belas e surpreendentes.

Palavras-chave: geometria plana; números complexos.

Atividade 1. A ILHA DO TESOURO

Um bando de piratas se dirigiu a uma ilha remota com o intuito de nela enterrar um tesouro. Na beira da praia, suposta retilínea, existiam duas grandes rochas. Situada entre elas e a certa distância da praia uma majestosa palmeira solitária se fazia notar.

Um dos piratas dirigiu-se a uma das rochas e andou, na direção perpendicular à reta que unia a rocha à palmeira, uma distância igual à distância entre a rocha e a palmeira. Outro pirata fez a mesma coisa com relação à outra rocha e a palmeira. Em seguida, eles caminharam um em direção ao outro e enterraram o tesouro na metade do caminho.

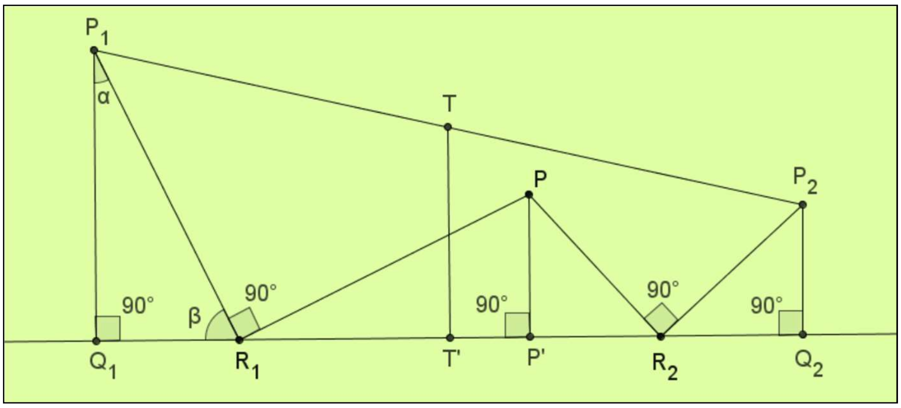


Dois anos mais tarde eles retornaram à ilha para desenterrar o tesouro. Facilmente acharam as rochas, porém não havia nenhum vestígio da posição da palmeira, provavelmente por conta de um furacão. Os piratas ficaram desolados.

Estavam já a ponto de desistir quando o mais jovem dos piratas, um garoto que, entre um saque e outro, vivia estudando geometria, disse ao capitão que, mesmo sem a palmeira, sabia como recuperar o tesouro. Dito e feito. Após umas poucas medições, apontou exatamente onde estava enterrado o tesouro!

Como ele conseguiu tal proeza?

Solução 1 (geometria sintética)



Sejam Q_1, Q_2, P' e T' as projeções ortogonais de P_1, P_2, P e T, respectivamente, sobre a reta t que representa a praia. Complete os itens abaixo e justifique cada um.

(a) $\Delta P_1R_1Q_1 \cong$ .... e $\Delta P_2R_2Q_2 \cong$ .... ;

(b) R_1Q_1 = ... e R_2Q_2 = ... ;

(c) Q_1T' = ... e Q_2T' = ... ;

(d) T' é ponto médio do segmento R_1R_2;

(e) P_1Q_1 = ... e P_2Q_2 = ... ;

(f) TT' = ...

Solução 2 (números complexos)

No plano complexo, considere $R_1 = -k$, $R_2 = k$ e $P = a + ib$ onde k, a e b são números reais satisfazendo $k > 0$, $|a| < k$ e $b > 0$.

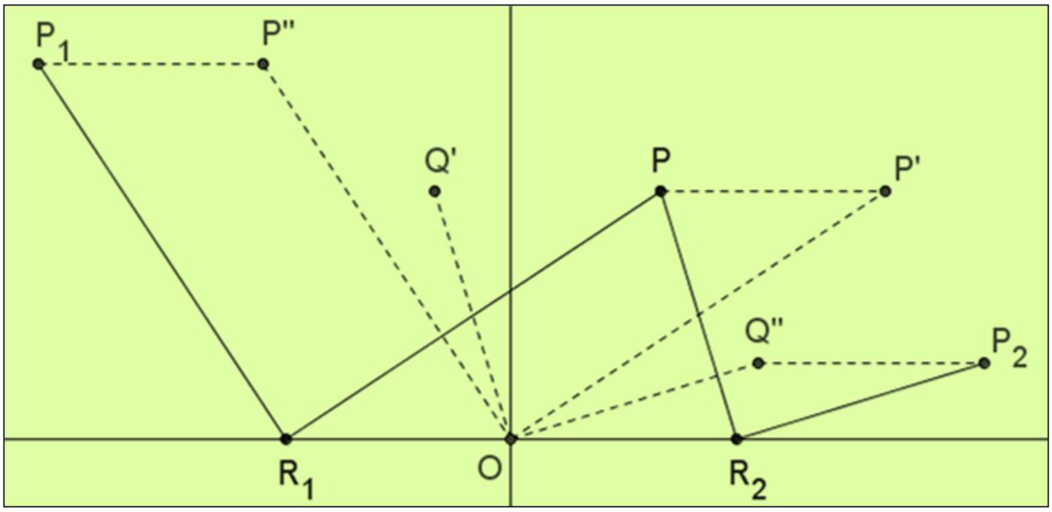
(a) Determine a parte real e a parte imaginária de P';

(b) Determine a parte real e a parte imaginária de P'';

(c) Determine a parte real e a parte imaginária de P_1;

(d) Analogamente, determine a parte real e a parte imaginária de Q', Q'' e P_2;

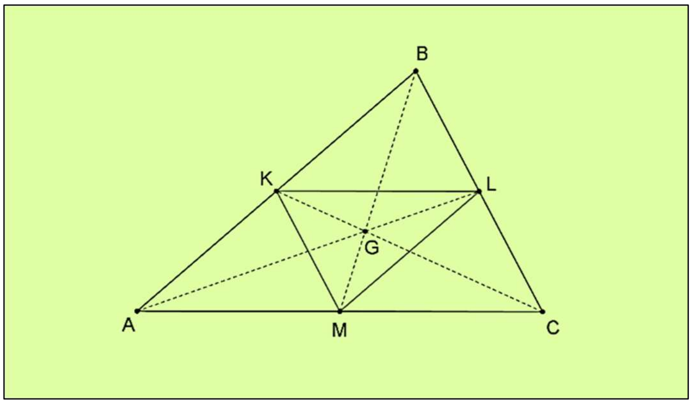
(e) Determine a parte real e a parte imaginária de $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$.



Atividade 2. TRIÂNGULOS COM MESMO BARICENTRO

Se *K*, *L* e *M* são os pontos médios dos lados *AB*, *BC* e *CA*, respectivamente, de um dado triângulo *ABC* então os segmentos *AL*, *BM* e *CK* são chamados **medianas** do ΔABC e o triângulo *KLM* recebe o nome de **triângulo medial** do triângulo *ABC*.

Um fato bem conhecido é que as medianas do ΔABC são concorrentes num ponto *G* que divide cada mediana na razão 2:1, isto é, $AG = 2GL$, $BG = 2GM$ e $CG = 2GK$. Esse ponto *G* é denominado **baricentro** do triângulo *ABC*.



Teorema. *O baricentro de um triângulo coincide com o baricentro do seu triângulo medial.*

Prova 1 (**geometria sintética**)

(a) *AKLM* é um paralelogramo, pois.................................... ;

(b) A mediana *AL* do ΔABC contém a mediana do ΔKLM traçada a partir do vértice *L*, pois.. ;

(c) Analogamente, as medianas BM e CK do ΔABC contém as medianas do ΔKLM traçadas a partir dos vértices M e K, respectivamente.

Prova 2 (**números complexos**)

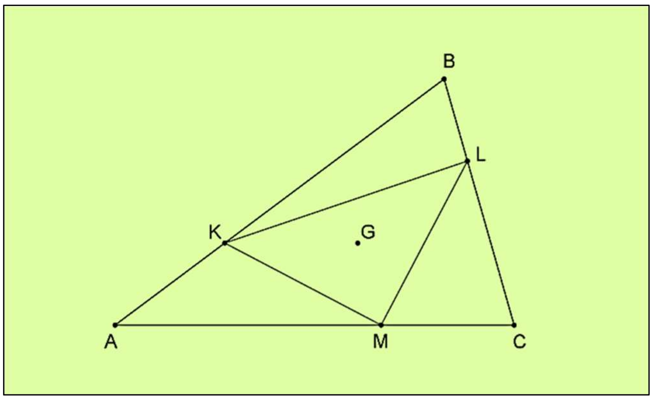
(a) Considerando os pontos A, B e C como números no plano complexo, tem-se K = ... , L = ... e M = ... ;

(b) Logo, $G - A = \frac{2}{3}(L - A)$ = ... e, portanto, $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$;

(c) Como $\frac{1}{3}(K + L + M)$ = ... $= \frac{1}{3}(A + B + C)$, segue a tese.

A seguir, procuramos por outros triângulos associados ao ΔABC que possuam o mesmo baricentro G.

Fato 1. *Sejam K, L e M pontos que dividem os lados AB, BC e CA, respectivamente, de um dado triângulo ABC numa razão fixada. Nessas condições, os triângulos KLM e ABC possuem o mesmo baricentro G.*

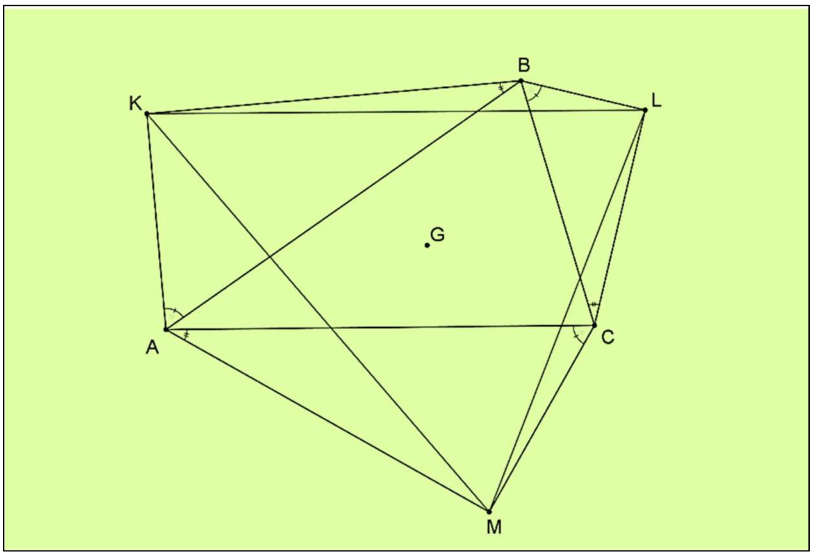


(a) Considerando os pontos A, B, C, K, L e M como números no plano complexo, pela hipótese, existe um número real Z tal que $K - A = Z(B - A)$, $L - B$ = ... e $M - C$ = ...

(b) Somando-se essas equações obtém-se $K + L + M$ = ...

Fato 2. *Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC constrói-se externamente três triângulos semelhantes ΔAKB, ΔBLC e ΔCMA. Nessas condições, os triângulos KLM e ABC possuem o mesmo baricentro G. A mesma conclusão vale se ΔAKB, ΔBLC e ΔCMA forem construídos internamente sobre os lados do ΔABC.*

(a) Considerando os pontos A, B, C, K, L e M como números no plano complexo, a semelhança dos triângulos AKB, BLC e CMA implica na existência de um número complexo $Z \neq 0$ tal que $K - A = Z(B - A)$, $L - B = Z(C - B)$ e $M - C = Z(A - C)$. Explique.

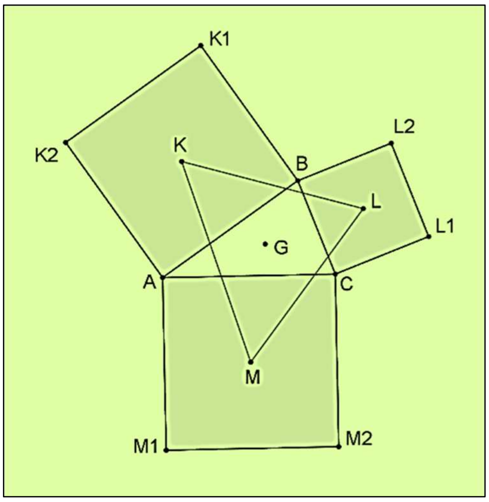


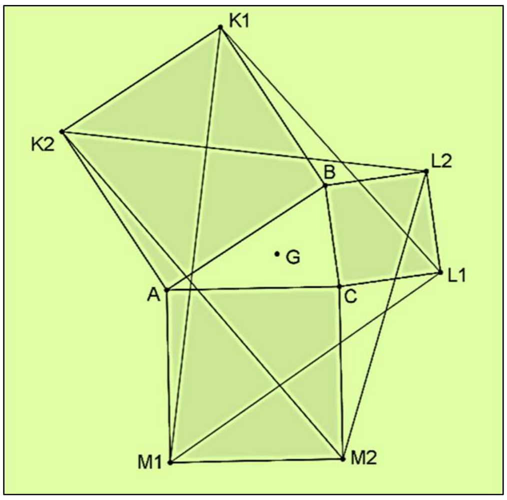
(b) Na figura acima o triângulo ABC está orientado negativamente. Neste caso, tem-se $0 < \arg(Z) < \pi$ ou $-\pi < \arg(Z) < 0$ conforme os triângulos AKB, BLC e CMA tenham sido construídos externamente ou internamente, respectivamente, sobre os lados do ΔABC. Por quê?

(c) Somando-se as equações obtidas em (a) tem-se $K + L + M$ = ...

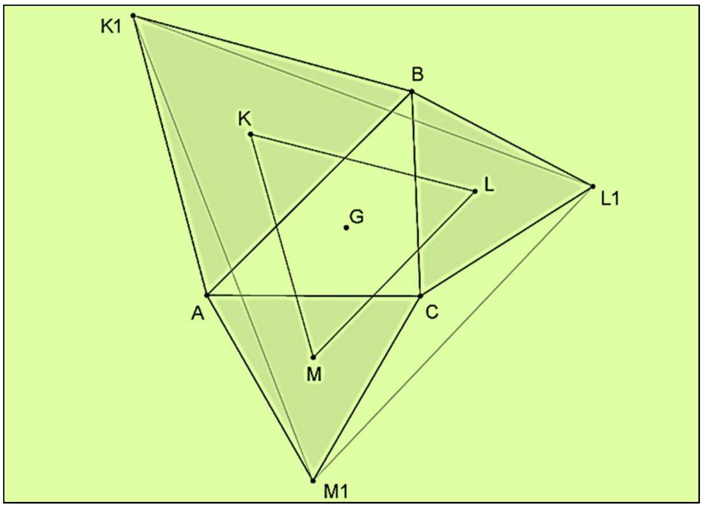
Seguem-se duas consequências surpreendentes do Fato 2. Justifique cada uma delas.

Fato 3. *Sejam K, L e M os respectivos centros dos quadrados ABK_1K_2, BCL_1L_2 e CAM_1M_2 construídos externamente sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC. Nessas condições, os triângulos ABC, KLM, $K_1L_1M_1$ e $K_2L_2M_2$ possuem o mesmo baricentro G.*





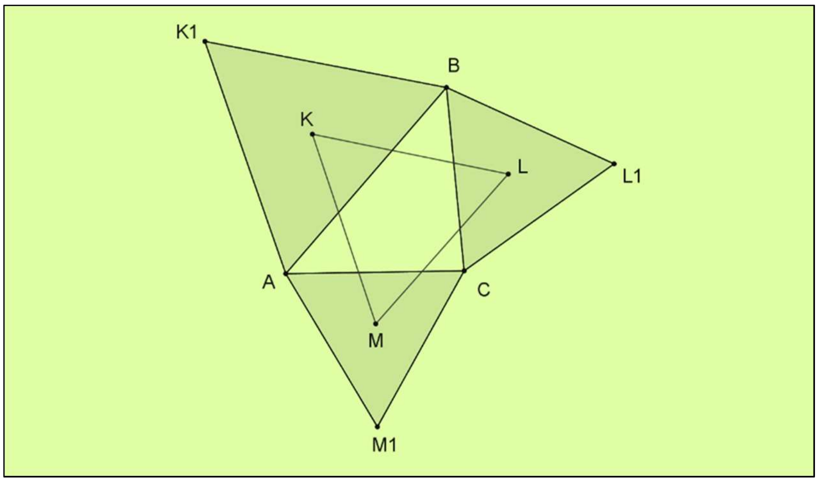
Fato 4. *Sejam K, L e M os respectivos centros dos triângulos equiláteros* AK_1B, BL_1C *e* CM_1A *construídos externamente sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC. Nessas condições, os triângulos ABC, KLM e* $K_1L_1M_1$ *possuem o mesmo baricentro G*.



Atividade 3. TEOREMA DE NAPOLEÃO

Relacionado à figura acima se tem um famoso resultado atribuído, por diversos autores, ao general francês Napoleão Bonaparte.

Teorema. *Os centros dos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados de um triângulo arbitrário são vértices de um triângulo equilátero*.



Prova 1 (**geometria sintética**)

Seja P, P distinto de B, o segundo ponto em que as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros ΔABK_1 e ΔBCL_1 se intersectam.

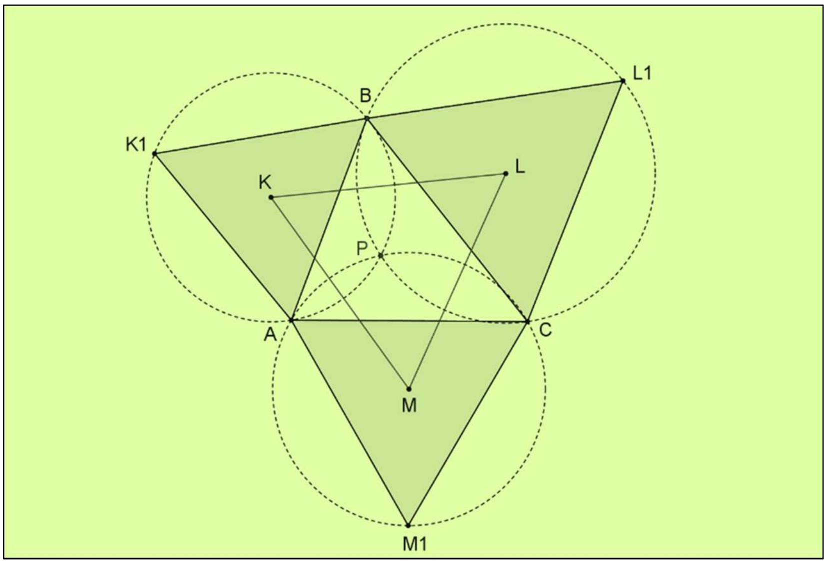
(a) Calcule as medidas dos ângulos $\angle APB$, $\angle BPC$ e $\angle CPA$;

(b) Conclua que P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo equilátero ΔCAM_1;

(c) Mostre que $\overleftrightarrow{KL}$ é a mediatriz do segmento PB;

(d) Analogamente, $\overleftrightarrow{LM}$ é a mediatriz do segmento PC e $\overleftrightarrow{MK}$ é a mediatriz do segmento PA;

(e) Mostre que $m(\angle MKL) = m(\angle KLM) = m(\angle LMK) = 60$.



Prova 2 (**trigonometria**)

Sejam $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = m(\angle CAB)$, $\beta = m(\angle ABC)$ e $\gamma = m(\angle BCA)$.

(a) Mostre que $BK = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ e $BL = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

(b) Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔKBL e ΔABC, conclua que $(KL)^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}ac(\mathrm{sen}\beta)$ (Analise separadamente os casos $\beta < 120$, $\beta = 120$ e $\beta > 120$);

(c) Analogamente, tem-se $(MK)^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}bc(\mathrm{sen}\alpha)$ e $(LM)^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}ab(\mathrm{sen}\gamma)$;

(d) Utilize a lei dos senos no ΔABC para concluir que $KL = LM = MK$.

Prova 3 (**números complexos**)

Fato 5. Suponha que os triângulos $Z_1Z_2Z_3$ e $W_1W_2W_3$ tenham a mesma orientação. Nessas condições, tem-se

$$\Delta Z_1Z_2Z_3 \sim \Delta W_1W_2W_3 \text{ se, e somente se, } \begin{vmatrix} Z_1 & W_1 & 1 \\ Z_2 & W_2 & 1 \\ Z_3 & W_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Fato 6. Suponha que o triângulo $Z_1Z_2Z_3$ está orientado positivamente. Sendo $1, \omega$ e ω^2 as raízes cúbicas da unidade, tem-se

$$\Delta Z_1Z_2Z_3 \text{ é equilátero se, e somente se, } Z_1 + \omega Z_2 + \omega^2 Z_3 = 0.$$

(a) Estabeleça o Fato 5 utilizando o critério LAL de semelhança de triângulos;

(b) Sendo $1, \omega$ e ω^2 as raízes cúbicas da unidade, mostre que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$;

(c) Estabeleça o Fato 6 relacionando o triângulo $Z_1Z_2Z_3$ com o triângulo de vértices $1, \omega$ e ω^2;

(d) Com as notações da figura anterior, mostre que $K + \omega M + \omega^2 L = 0$. Pelo Fato 6, conclui-se que ΔKML é um triângulo equilátero.

Atividade 4. O PASSEIO DA FORMIGA

Uma formiga parte da origem (0, 0) e anda uma unidade até o ponto $P_0 = (1, 0)$. A seguir, vira 30° para a esquerda e anda $\frac{1}{2}$ unidade atingindo o ponto $P_1 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$. Em seguida, vira novamente 30° para a esquerda e anda mais $\frac{1}{4}$ unidade. E assim, sucessivamente, sempre virando 30° para a esquerda e andando metade da distância que andou na vez anterior. Nessa trajetória "poligonal" ela se aproximará de algum ponto? Qual?

Solução

(a) Verifique que $P_1 = (1 + \frac{1}{2}\cos 30,\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} 30)$;

(b) Sendo $P_n = (x_n, y_n)$, obtenha as expressões de x_n e de y_n;

(c) Mostre que (x_n) e (y_n) são sequências convergentes provando que, de fato, a formiga se aproxima de algum ponto;

(d) Escreva P_n na forma $P_n = x_n + iy_n$ e determine o número complexo $P = \lim_{n\to+\infty} P_n$.

Referências Bibliográficas

HAHN, Liang-shin. Complex Numbers & Geometry, The Mathematical Association of America, 1994.