DIFICULDADES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: A SEMIÓTICA PODE AJUDAR?

Maria Cristina Bonomi, IME-USP, crisb@ime.usp.br

Resumo

A presença da semiótica é inegável na sala de aula de Matemática e a consciência desse fato pode ser de grande auxílio para resolver ou, pelo menos, diminuir dificuldades inerentes ao processo de ensino-aprendizagem. A teoria dos registros de representação semiótica, de autoria do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, tem-se revelado importante para a compreensão da presença da semiótica nas aulas de Matemática. Neste trabalho são discutidos alguns exemplos dessa importância na construção do conhecimento matemático, bem como algumas armadilhas que podem surgir, às quais é fundamental estar alerta.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Matemática. Representações semióticas em Matemática. Formação de professores de Matemática.

Introdução

Muitas vezes, quando professores de Matemática se encontram, o assunto emerge, de maneira recorrente:

— *Os alunos não sabem...*

Diante de tal constatação, a postura que pode se tornar natural, se ainda não o for, é uma atitude indagadora: como fazer para que eles apreendam? Sem esse posicionamento, a tomada de consciência inicial serve apenas para fazer certo tipo de diagnóstico: a responsabilidade é dos alunos ou de seus pais, ou da escola anterior, ou do professor anterior... Busca-se algum culpado, que, uma vez identificado, quem sabe, resolverá o problema.

A questão é que, provavelmente, se os alunos não sabem determinado assunto, em geral já se estabeleceu um bloqueio e eles não conseguirão ir adiante. Mais ainda, encontrar o 'culpado' pela situação não ajuda, pois a dificuldade está presente aqui e agora: não é possível voltar no tempo ou mudar de lugar. Muitas vezes então, será preciso revisitar alguns pontos que ficaram obscuros, buscando construir significado para aquilo que ainda não tem e, por isso mesmo, não foi apreendido.

O fato de que os alunos precisam aprender Matemática parece ser claro para todos. Estudiosos nacionais ou internacionais refletem, argumentam a respeito e muitas publicações são disponibilizadas para os professores de todos os níveis escolares. Entretanto, resultados de exames, também nacionais ou internacionais, continuam mostrando que... os alunos não sabem...

Uma vez mais, vamos refletir um pouco.

A construção de algum conhecimento matemático ocorre quando o novo objeto (conceito) é incorporado à *rede* de conhecimentos e significados[1] dos alunos passando a constituir um novo nó, ao serem estabelecidas novas conexões com os nós já existentes. Assim, por meio de feixes de relações com conhecimentos já construídos, isto é, que já estão presentes na rede, constitui-se cada novo nó.

A rede pode ser ampliada ou refinada, cada vez que um novo nó é construído. É preciso observar que não se trata de uma construção linear: uma rede pode crescer em todas as direções e sentidos, não há preponderância de qualquer nó, não há centro; a todo momento ela pode ser modificada, bastando construir novas ligações entre nós, sejam eles novos ou não. (MACHADO, 2011)

Nesse sentido, a construção do conhecimento matemático não pode ser apenas técnica, com o estabelecimento de leis e regras que, aos olhos dos estudantes, muitas vezes parecem arbitrárias, sem significado, e que, portanto, para eles, precisam ser memorizadas.

Uma constatação evidente é a de que os objetos matemáticos – retas, números, equações, funções, dentre muitos outros – não possuem existência real e assim não são acessíveis aos sentidos humanos: não é possível vê-los, cheirá-los, saboreá-los, ouvi-los, tocá-los... Percebe-se claramente que a situação é muito diferente daquela dos objetos de outras áreas do conhecimento. Em Matemática só é possível trabalhar com representações dos objetos e, por meio delas, busca-se a construção do conhecimento dos referidos objetos, com suas características e propriedades.

O psicólogo e filosofo francês Raymond Duval lançou o alerta para existência de um *paradoxo cognitivo do pensamento matemático*:

> (...) de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, por outro lado, somente por meio de representações semióticas é possível uma atividade sobre objetos matemáticos. Esse paradoxo pode constituir um verdadeiro círculo vicioso para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam deixar de confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles apenas podem estabelecer relações com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de representação semiótica, torna a confusão praticamente inevitável. E, ao contrario, como podem esses

[1] A imagem metafórica da rede do pescador: um novo nó da rede se constitui por meio de ligações com outros nós já existentes.

> indivíduos adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se ainda não possuem uma apreensão conceitual dos objetos representados? (DUVAL, 1993, p.38 apud D'AMORE, 2005, p.51)

A questão, portanto, não parece ser tão simples e, enquanto tal, precisa ser considerada com cuidado. De modo algum pode ser ignorada.

No próximo parágrafo, serão apresentados, de maneira sucinta, alguns aspectos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, uma vez que esse referencial parece ser um dos mais substanciais para fornecer um embasamento teórico para as pesquisas sobre as relações entre aprendizagem matemática e representações semióticas, no mundo inteiro. Para um maior detalhamento, o leitor interessado pode consultar os textos indicados na bibliografia.

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

A semiótica – teoria geral dos signos – nasceu há muito tempo. Nas paredes das cavernas, os estudiosos encontraram muitos registros deixados pelo homem em seus primórdios: são figuras, sinais, representações, marcas culturais de uma sociedade incipiente. A utilização de signos para fazer representações pode ser, portanto, considerada tão antiga quanto a própria humanidade.

Na história ocidental antiga, com os gregos, posteriormente na Idade Média, no Renascimento, até chegar ao mundo contemporâneo, a semiótica foi sendo desenvolvida, aprimorada, primeiramente mais ligada às línguas uma vez que uma língua é um paradigma de um sistema de signos.

Na premissa do livro **Primi elementi di semiotica**, D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori, afirmam que:

> A semiótica começou a fazer parte explicitamente da didática da matemática na metade da década de 1990. Foi então que (...) Raymond Duval evidenciou a necessidade de usá-la e as armadilhas que ela coloca para a construção cognitiva dos objetos matemáticos por parte de nossos estudantes. (D'AMORE et al., 2013, p. XI)

De fato, graças à percepção aguda do filósofo francês Raymond Duval é que, no final do século XX, a semiótica e a Didática da Matemática foram relacionadas e a primeira passou a fazer parte explícita da segunda. Sua perspicácia levou-o a perceber a distinção existente entre a Matemática e as outras ciências, no que diz respeito aos objetos e suas representações.

No contexto da Psicologia Cognitiva, Duval desenvolveu um modelo para o funcionamento cognitivo do pensamento, no qual considera as mudanças de registros de representação. Ele considera que existem tipos muito diferentes de registros nos quais é possível fazer as representações:

- o registro da língua natural – utilização de línguas maternas;
- o registro geométrico ou figural – utilização de figuras geométricas planas ou espaciais; construção com instrumentos;
- o registro dos sistemas de escrita e cálculo – numéricos, algébricos, simbólicos;
- o registro gráfico – utilização de sistemas de coordenadas (DUVAL, 1995).

Cada representação oferece uma ou mais características ou – utilizando a terminologia do autor – diferentes componentes conceituais do objeto. Uma única representação não consegue fornecer todas elas. Para exemplificar tal fato, vamos considerar o objeto matemático função polinomial do segundo grau (a mais simples):

- no registro da língua natural: a função que a cada número real associa o seu quadrado;
- no registro algébrico: $f(x) = x^2$;
- no registro gráfico, com o auxílio de um software computacional

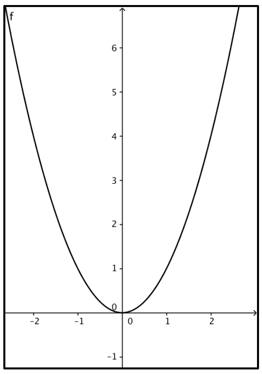

Figura 1: O gráfico de $f(x) = x^2$.

Pode-se perceber que a informação dada pelo registro língua natural – a ordenada de cada ponto é igual ao quadrado de sua abscissa não é logo visível no registro gráfico; por outro lado, também não é imediatamente evidente que qualquer ponto da curva denominada parábola[2] satisfaz a condição de ter a ordenada igual ao quadrado da abscissa. Entretanto, ao examinar as representações nos dois registros,

[2] Ao falar da curva denominada parábola entende-se o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto *F* (foco) dado e de uma reta *d* (diretriz) também dada, à qual *F* não pertence.

juntamente àquela no registro algébrico, obtemos diversas propriedades do mesmo objeto matemático, as quais o caracterizam. O conhecimento matemático desse objeto, com seus múltiplos significados, constitui um novo nó na rede, ao serem estabelecidas relações com nós preexistentes, como, por exemplo, funções, funções polinomiais do primeiro grau, quadrado de um número, seção de uma superfície cônica, dentre outras.

Duval identifica dois tipos de operações que podem ser realizadas com as representações: no interior de um mesmo registro – tratamento – ou transitando entre registros diferentes – conversão.

Do ponto de vista do ensino, observa-se que, em geral, dá-se ênfase aos tratamentos, seja no registro numérico ou no registro algébrico, como por exemplo, ao solicitar que o aluno *calcule*, *simplifique*, *resolva*..., permanecendo sempre no mesmo registro. Tratamentos no registro gráfico são menos frequentes, muitas vezes inexistentes. Convém ter claro que tratamentos exaustivos no registro algébrico, por exemplo, frequentemente carecem de significação para os estudantes, e conduzem ao uso da técnica pela técnica, o que estimula somente a memorização.

E o que dizer das conversões? Habitualmente solicita-se ao aluno que faça a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, sempre nesse sentido; dificilmente no sentido contrário, quando a relação entre o gráfico e a expressão algébrica poderia adquirir um significado mais incisivo.

Quando os significados estão claros é possível construir o conhecimento, ou seja, chegar à *noesis*, que é a apreensão conceitual do objeto. Em sua teoria, Duval esclarece que o trabalho com as representações semióticas é fundamental, mais ainda que *não existe noesis sem semiosis*. A união das ações – representar, fazer tratamentos, fazer conversões – sobre os conceitos é a construção do conhecimento matemático, ou seja, a *noesis* em Matemática. (DUVAL, 1995)

Alguns Exemplos (JAHN, BONOMI, no prelo)

i) Após o estudo das funções elementares e seus gráficos, utilizando translações – horizontais e verticais – e mudança de inclinação da curva, pode ser solicitada aos estudantes a execução da seguinte tarefa:

- Criar uma figura e reproduzi-la no computador com o auxílio de algum software gráfico[3]. Se necessário, além dos gráficos de funções, poderão ser utilizados circunferências ou segmentos verticais.

A ideia é a de efetuar a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, o que em geral não é feito na escola, quando, normalmente, apenas a conversão no sentido contrário é proposta. O trabalho consiste em, tendo a figura, decidir quais funções e em que domínios ela pode ser produzida.

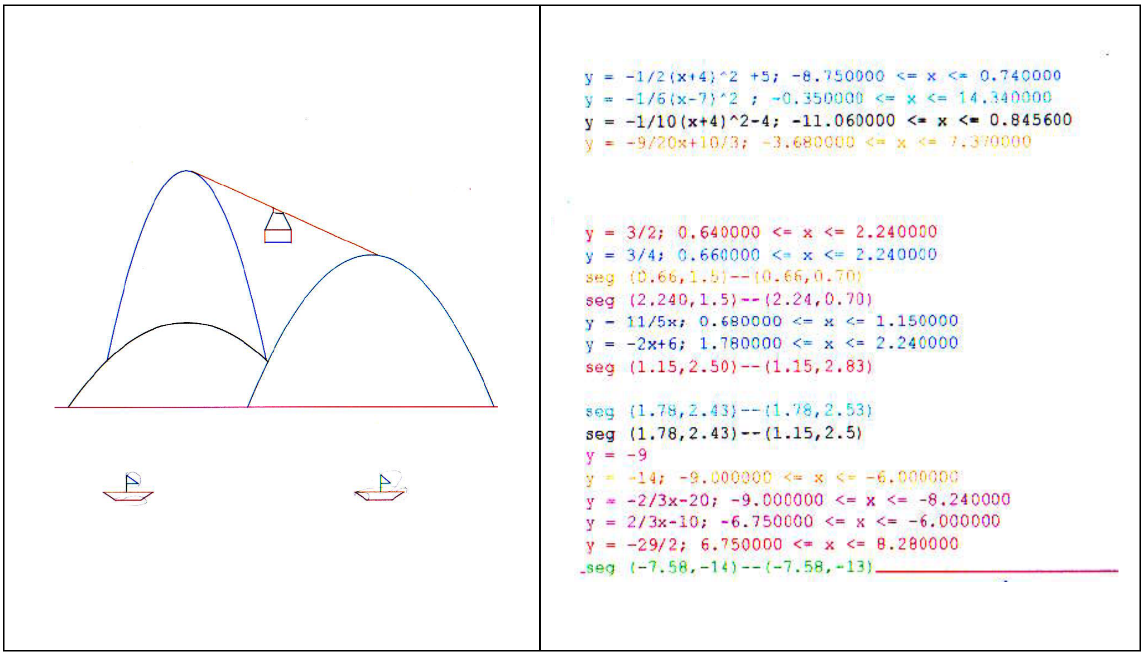

Figura 2: Produção de um dos grupos de estudantes. (Fonte: Acervo pessoal da autora)

ii) No estudo de inequações, pode-se solicitar uma tarefa que, normalmente não está presente nos livros destinados à Educação Básica:

- Estabelecer uma inequação cuja solução gráfica possa ser obtida a partir da figura abaixo, na qual estão desenhados os gráficos das duas funções que devem ser utilizadas. Vale observar que os arcos presentes na figura são arcos parabólicos. Em seguida, resolver a inequação no registro algébrico, mostrando o conjunto solução também no registro gráfico.

[3] Na época, foi sugerido explicitamente o uso do *Winplot*, disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html - acesso em 24/09/2015.

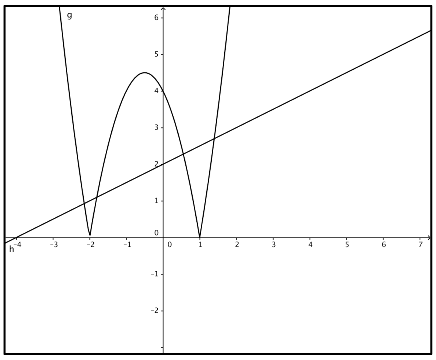

Figura 3: O gráfico dado com as funções envolvidas.

Também nesse caso, a ideia é trabalhar no registro gráfico possibilitando a atribuição de significado à resolução da inequação no registro algébrico. É interessante observar que criar – pelo menos parcialmente – seu próprio exercício gera, no aluno, um envolvimento muito salutar por fazê-lo sentir-se autor, mais responsável pelo conhecimento que está em jogo.

iii) Os chamados produtos notáveis, muitas vezes, constituem para os alunos um conjunto de fórmulas que, dada a ausência de significação, precisam tão somente ser memorizadas. Elas são deduzidas por meio de tratamento algébrico, por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Estamos nos referindo ao quadrado ou cubo da soma, ao quadrado ou cubo da diferença e também ao produto da soma pela diferença de dois números. A utilização do registro figural, com a conversão entre os registros algébrico e esse registro, pode vir a ser fundamental para a construção do significado, permitindo a apreensão do objeto matemático em questão.

Vamos observar o caso: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ no registro figural:

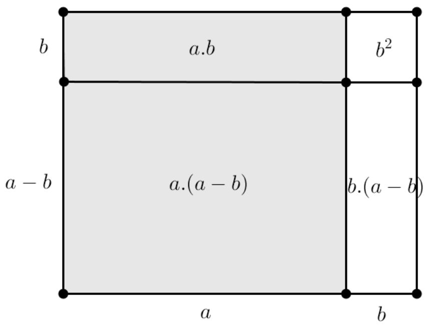

Figura 4: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Nesse registro, observamos que

$$(a+b)(a-b) = a.(a-b) + b.(a-b) = a^2 - a.b + b.a - b^2 = a^2 - b^2$$

bastando considerar as áreas dos diferentes quadriláteros envolvidos.

Há inúmeros exemplos que podem ser criados, seja envolvendo a representação de um objeto em diferentes registros, ou o tratamento em algum registro não tão usual como o registro algébrico, ou a conversão em ambos os sentidos, entre registros diferentes. A emergência de maior significação ficará evidente!

Cuidados essenciais

Ao fazer uso da representação de um objeto em um determinado registro é preciso estar alerta para dificuldades que podem vir a ser involuntariamente introduzidas. (D'AMORE et al., 2013)

Vamos analisar alguns exemplos, retirados dessa obra.

i) Muitas vezes, provavelmente vezes demais, nos livros didáticos aparece a figura de um polígono convexo para representar o objeto matemático polígono. Isso significa que, dificilmente é desenhado um polígono côncavo ou um polígono com 'algum buraco'. Assim, considere-se a seguinte afirmação:

- Seja dado um polígono F com perímetro p e área A; modificamos F: se A aumenta, necessariamente p aumenta (e vice-versa). (D'AMORE et al., 2013, p.77) Ela é verdadeira?

Para responder a essa pergunta, o senso comum, aliado à figura normalmente vista na escola, produz uma resposta afirmativa que é equivocada, gerada pela representação semiótica padrão. De fato, dificilmente alguém recorre à imagem de um polígono côncavo como sendo aquele dado inicialmente, conforme figura abaixo.

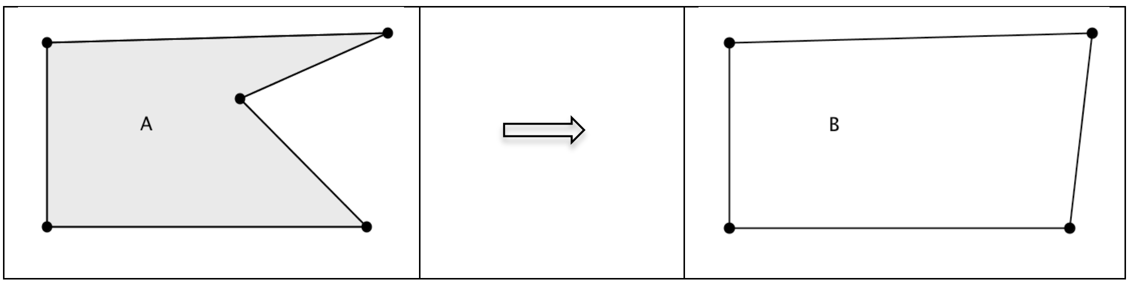

Figura 5: O polígono A foi modificado produzindo o polígono B, cuja área é maior do que a de A. Entretanto, o perímetro de B é menor do que o perímetro de A.

Há 9 casos possíveis de relações entre perímetros e áreas de figuras: pode ser uma boa reflexão encontrá-las todas.

ii) Um segundo exemplo a considerar é aquele do objeto matemático reta e de suas representações semióticas, quando são geradas grandes confusões manifestadas por *misconcepções* dos alunos do tipo:

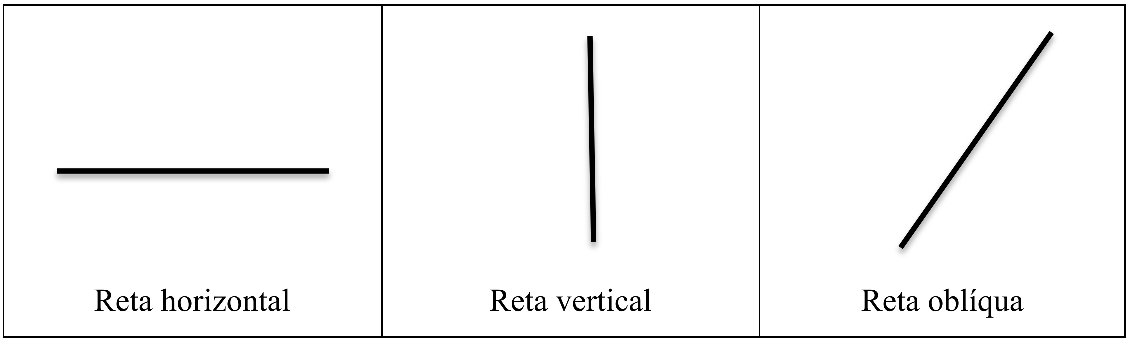

Figura 6: Retas em determinadas posições... mas, em relação a quê?

Novamente, a confusão decorre do fato da representação da reta ter sido feita com relação ao plano de uma folha de papel, ou seja, os termos horizontal, vertical, oblíqua claramente mostravam, nessa situação, serem termos relativos e não absolutos. Se isso não estiver claro, a *misconcepção* para o estudante é inevitável: uma reta pode ser horizontal, vertical ou oblíqua por si só, o que não tem sentido algum.

Enquanto objeto matemático que não tem existência real, na Geometria Euclideana, uma reta não tem esse caráter posicional relativamente a um plano e é preciso tomar muito cuidado para não criar essas confusões ao fazer representações semióticas.

iii) Um objeto matemático sem dúvida muito importante é o ponto com suas múltiplas representações, nos diferentes registros: em língua natural: ‘um ponto’; no registro simbólico: uma letra maiúscula do alfabeto latino (A, B, P e assim por diante), um par ordenado de números reais no registro numérico ou no algébrico; no registro gráfico: representação do par ordenado de números reais; no registro figural: um ponto marcado numa reta com um sinal gráfico tal qual uma ‘bolinha’ preta, dentre várias outras representações possíveis.

Essa última representação semiótica considerada exige certo cuidado, e mais, sempre que possível, é preciso conscientizar os alunos afim de evitar problemas futuros.

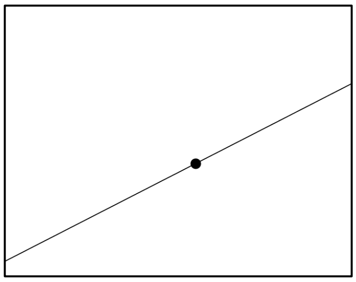

Figura 7: Representação no registro geométrico de um ponto numa reta.

Na obra **Primi elementi di Semiotica**, os autores fazem um alerta:

> A confusão semiótica sobre esse ... ponto conduz a problemáticas radicais sucessivas; (...) se o ponto é o signo redondo e negro que o representa, quando, posteriormente, se trabalha na reta numérica dos números racionais, torna-se impossível aceitar a ideia de densidade: “entre dois números racionais, por mais próximos que estejam, sempre há infinitos números racionais”, que, na interpretação dos estudantes se transforma em: “entre dois pontos redondos e negros, por menores e próximos que sejam, encontram-se sempre...” e aqui tudo se bloqueia: impossível admitir infinitos pequenos círculos negros; quando muito, haverá uma certa quantidade. (D’AMORE et al., 2013, p. XI)

Uma reflexão necessária diz respeito à diferença entre o objeto matemático ‘ponto’ e sua representação e precisa ser feita com todos os estudantes, assim que a idade o permitir. Sem ela, o desastre é previsível.

Considerações finais

Este trabalho não pretende esgotar um assunto que é muito amplo, importante e que constitui um campo fértil para o professor que pretende ser pesquisador de sua própria prática. Como foi mencionado inicialmente, a semiótica não pode ser ignorada no trabalho com a Matemática. Ela é de grande auxílio quando são consideradas várias representações de um mesmo objeto matemático, trazendo componentes conceituais diferentes e possibilitando sua apreensão por parte do estudante. É dessa maneira que a conclusão de Duval adquire significação total: não há *noesis* sem *semiosis*.

Entretanto, é importante ter claro que é preciso ser muito cuidadoso ao fazer uso das representações semióticas e estar alerta para as *misconcepções* que podem ser geradas e que precisam ser também discutidas com os estudantes.

Finalmente, o cuidado com as representações dos objetos matemáticos nos diferentes registros também deve servir para considerar os erros cometidos pelos alunos, entendendo que: um erro exige respeito, reflexão e resolução. Os três 'Rs' e as perguntas que deles surgem podem ser assunto para outro artigo...

Referências bibliográficas

D'AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.

D'AMORE, B.; Fandiño Pinilla, M.I. e Iori, M. **Primi elementi di semiótica:** La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento dela matemática. Bologna: Pitagora Editrice, 2013.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

JAHN, A. P.; BONOMI, M. C. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica embasando situações didáticas de um curso de Formação Inicial de Professores de Matemática no Brasil. In: CIEMeLP 2015: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, 2015, Coimbra. **CIEMeLP 2015: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa**. Coimbra: Universidade de Coimbra (no prelo).

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 2011.