Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática
"João Afonso Pascarelli"
IME USP

Oficina 13 – A área de figuras malcomportadas

José Luiz Pastore Mello (Colégio Santa Cruz)
jlpmello@uol.com.br
IME/USP, 16 de outubro de 2015.

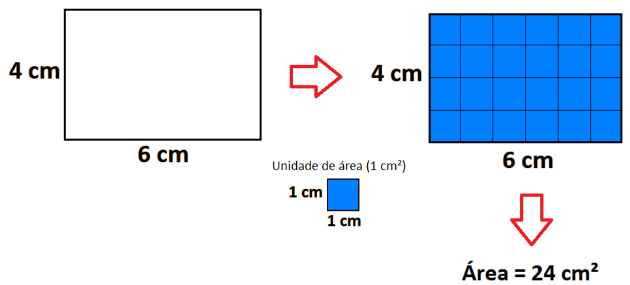
Introdução

A ideia de calcular a área de uma figura plana por meio da comparação com uma unidade de área parece ser suficientemente clara e isenta de grandes armadilhas, porém, um olhar mais cuidadoso sobre ela pode revelar algumas surpresas ao longo da história da matemática. A primeira parte destas notas se concentrará na investigação da área de polígonos dando especial atenção a duas dessas surpresas, a saber: a dos segmentos incomensuráveis, e a da equidecomposição de polígonos.

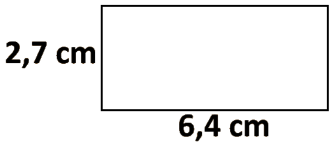
Na segunda parte abre-se a discussão para o cálculo da área de figuras planas quaisquer e, nesse caso, o foco central será colocado em propostas de atividades didáticas que permitam o cálculo da área de figuras não poligonais, que chamaremos de figuras malcomportadas, no ambiente das aulas de matemática da escola básica.

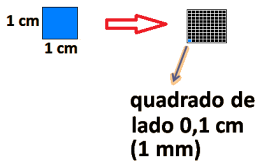
Segmentos incomensuráveis e a área de polígonos

Em geral, convenciona-se tomar como unidade de medida de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (u). Assim, qualquer quadrado cujo lado meça 1 u terá, por definição, área igual a 1 u². Em particular, se a unidade for dada no Sistema Internacional de Unidades, u será o metro, ou algum dos seus múltiplos (decâmetro, hectômetro, quilômetro) ou submúltiplos (decímetro, centímetro, milímetro). Admite-se nestas notas daqui para frente, e sem perda de generalidade, que nossa unidade de comprimento u será o centímetro (cm). Nesse caso, nossa unidade de área será 1 cm², que corresponde a um quadrado de lado 1 cm. Nesse caso, a área de um polígono P será um número que deverá exprimir quantas vezes o polígono P contém a unidade de área que, no nosso caso, corresponde à 1 cm². Podemos exibir uma infinidade de exemplos para os quais nossa convenção está muito bem resolvida. Veja um deles (retângulo de 4 cm por 6 cm):



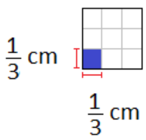
Nossa convenção parece comportar-se muito bem no caso em que P é um retângulo com lados de medidas inteiras, mas o que temos a dizer se as medidas não forem inteiras? Nesse caso, basta subdividir a unidade de área conforme a conveniência. Veja um exemplo.



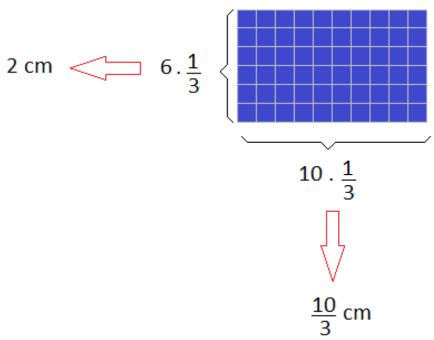


Para medir a área do retângulo de 2,7 cm por 6,4 cm, subdividimos a unidade de área em 100 partes e teremos um novo quadrado, de lado 0,1 cm, que cabe um número inteiro de vezes (64x27=1728) no retângulo. Uma vez que 100 das novas unidades recompõem a unidade padrão de 1 cm², a área do retângulo será 1728÷100=17,28 cm². Não seria muito diferente disso se quiséssemos calcular a área de um retângulo de 2,74 cm por 6,49 cm. Nesse caso teríamos que dividir 1 cm² em 10000 quadrados, cada um com 0,01 cm de lado. O retângulo teria 274x649=177826 da nova unidade de área, o que corresponde a 177826÷10000=17,7826 cm².

Agora, nossos problemas estão bem encaminhados quando os lados do retângulo são números não inteiros com representação decimal finita, mas há ainda o que se pensar no caso em que as medidas de dois ou quatro lados do retângulo são dízimas periódicas como, por exemplo, em um retângulo de 2 cm por 3,333...cm. Nesse caso, o primeiro passo consiste em encontrar a fração geratriz da dízima $\left(3{,}333\ldots=\frac{10}{3}\right)$. Em seguida, escrevemos a outra medida do retângulo como $\frac{6}{3}$. O próximo passo consiste em dividir a unidade padrão em 9 quadrados idênticos que, nesse caso, terão lados de medida $\frac{1}{3}$ cm.

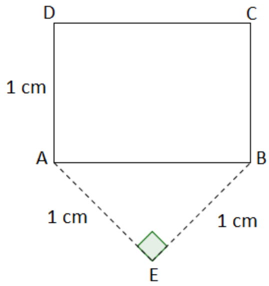


A nova unidade cabe 6x10=60 vezes no retângulo. Como são necessárias 9 dessas unidades para recompor a unidade padrão de 1 cm², segue que a área do retângulo será (60÷9) cm², ou seja, $\frac{20}{3}$cm².



De forma geral, se os lados do retângulo são frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$, então a unidade padrão de área deverá ser dividida em b^2 quadrados idênticos para que seja possível fazer o calculo da área do retângulo, e esse procedimento é geral e finaliza a discussão do caso em que as medidas do retângulo são números racionais quaisquer já que sempre podemos escrever duas frações quaisquer em frações de mesmo denominador.

Ocorre, ainda, que nem sempre o comprimento e a largura de um retângulo são números racionais, como se pode observar no exemplo do retângulo ABCD indicado abaixo.



Pelo teorema de Pitágoras, $AB^2=1^2+1^2$, o que implica dizer que AB é o número que, quando elevado ao quadrado, resulta em 2. Por conveniência, chamamos esse número de $\sqrt{2}$. Calcular a área do retângulo ABCD resume-se, portanto, em determinar quantas vezes a unidade padrão de 1 cm² cabe em um retângulo de comprimento $\sqrt{2}$ cm e largura 1 cm. Ocorre que $\sqrt{2}$ não possui representação decimal finita, nem representação decimal infinita e periódica. A tabela a seguir mostra o erro que cometeríamos ao usar algumas aproximações decimais finitas para $\sqrt{2}$, indicadas na coluna de x.

x	x^2	erro: $\lvert 2 - x^2 \rvert$
1,4	1,96	0,04 ↓
1,5	2,25	0,25 ↑
1,45	2,1025	0,1025 ↑
1,41	1,9881	0,0119 ↓
1,42	2,0164	0,0164 ↑

Observando a tabela concluímos que a aproximação de $\sqrt{2}$ com duas casas decimais é 1,41.

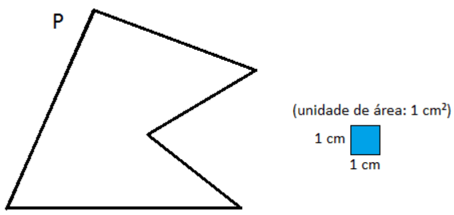
Usando a aproximação racional de 1,41 para $\sqrt{2}$, o cálculo da área do retângulo ABCD exigiria subdividir a unidade de área em 10000 quadrados idênticos de lado 0,01 cm e, nesse caso, 141x100=14100 deles preencheriam o retângulo ABCD. Para recompor a unidade padrão (1 cm²) dividiríamos 14100 por 10000, encontrando a área de 1,41 cm². Ocorre, porém, que esse cálculo não é exato porque $\sqrt{2}$ não é igual a 1,41. A incômoda situação sinalizada por esse exemplo também causou estranheza aos matemáticos pitagóricos que, ao suspeitarem da incomensurabilidade entre segmentos de medidas 1 e $\sqrt{2}$, entraram em profunda crise, como relata Platão em seus Diálogos. Dizemos que dois segmentos possuem medidas comensuráveis quando é possível encontrar uma subdivisão da unidade de medida de comprimento que caiba números inteiros de vezes em cada um dos dois segmentos. No caso de segmentos de medida 1 e $\sqrt{2}$, tal tarefa é impossível e, portanto, dizemos que são segmentos não comensuráveis, ou incomensuráveis.

A questão dos segmentos incomensuráveis, que parece ser um problema do campo da geometria métrica, é em essência um problema que assenta-se na idéia de número real [1]. Dizer que o segmento de medida $\sqrt{2}$ é incomensurável com um segmento de medida 1 é equivalente a dizer que $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, um número cuja representação decimal não é finita, nem infinita periódica.

Alguns historiadores da matemática [2] apontam que a descoberta de segmentos incomensuráveis, na Grécia antiga, foi responsável por uma crise na escola pitagórica[1] e, ao que se sabe, o matemático grego Eudoxo (século IV a.C.) foi o primeiro a lidar de forma precisa com as grandezas incomensuráveis [4].

A teoria das proporções de Eudoxo, quando transcrita para uma linguagem moderna, resume-se em conceber que para conhecer um número irracional x, basta conhecermos os números racionais menores do que x (suas aproximações por falta) e os números irracionais maiores do que x (suas aproximações por excesso). O resultado de Eudoxo está exposto no livro V dos Elementos de Euclides [5], e seus desdobramentos modernos culminam com a fundamentação dos números reais de Dedekind no século XIX.

No ponto em que estamos agora nestas notas, os lados de um retângulo podem ser incomensuráveis com o lado do quadrado da nossa unidade de área. Um outro problema, que passaremos a investigar agora, diz respeito à forma do polígono P, que deixará de ser um simples retângulo. Agora estamos interessados em encontrar um argumento consistente que garanta ser possível medir a área de polígonos não retangulares por meio de uma unidade de medida de área que nasceu da padronização de um quadrado. A figura a seguir mostra não ser de imediata aceitação o fato de que sempre será possível expressar a área de um polígono por meio de uma comparação com um quadrado.

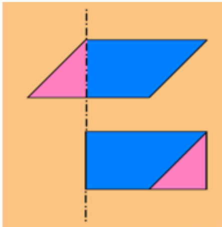


[1] Para um contraponto à essa interpretação, ver a referência [3].

A área de um polígono qualquer e a "forma" da unidade de área

Para investigar a questão da "forma" do polígono como sendo um obstáculo ao uso da nossa unidade padrão de área, discutiremos um importante resultado sobre a decomposição de polígonos.

Dizemos que dois polígonos são equidecomponíveis se é possível decompor um deles em um número finito de partes e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor outro polígono. Por exemplo, um paralelogramo é equidecomponível com um retângulo, como mostra a figura.

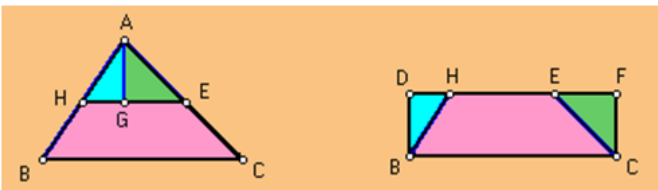


É evidente que polígonos equidecomponíveis têm mesma área, porém, a recíproca dessa afirmação não é tão evidente assim. Se verdadeira, ou seja, se polígonos de mesma área são equidecomponíveis entre si, esse será um resultado muito interessante para progredirmos no problema que estamos investigando, como veremos mais adiante.

A recíproca mencionada é verdadeira, tendo sido demonstrada no século XIX por três matemáticos de forma independente. Tal resultado é conhecido como teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien[2], e diz que: dois polígonos com áreas iguais são sempre equidecomponíveis.

Faremos, a seguir, uma justificativa (em cinco etapas) da validade do teorema mencionado. Se por um lado a justificativa abra mão de um certo formalismo, por outro nos parece acessível ao trabalho com estudantes da escola básica. Uma demonstração detalhada desse teorema pode ser encontrada em [6]. Vamos em frente com a justificativa.

1) Um triângulo e um retângulo de mesma área são equidecomponíveis.

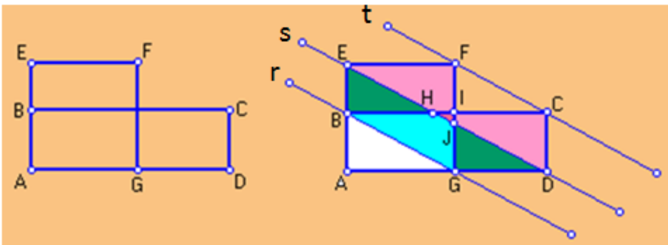


[2] Willian Wallace (escocês) em 1807, Farkas Bolyai (húngaro) em 1832, e Paul Gerwien (alemão) em 1833 [6].

Seja a área do triângulo ABC igual a do retângulo CBDF. Sendo H e E pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, segue que os triângulos AGH e AGE, quando convenientemente rotacionados por H e E, formarão o retângulo CBDF.

Portanto, com uma reorganização das três "peças" que compõem o triângulo ABC podemos formar o retângulo CBDF, o que mostra que os dois polígonos são equidecomponíveis.

2) Um retângulo e um quadrado de mesma área são equidecomponíveis.



Seja a área do quadrado AEFG igual a do retângulo ABCD. Sobrepondo os dois polígonos, provaremos inicialmente que as retas r, s e t são paralelas. Se as dimensões de ABCD são **a** e **b** (a>b), segue que o quadrado AEFG terá lado $\sqrt{ab}$. Sendo α, β e θ as medidas dos ângulos agudos $B\hat{G}A$, $E\hat{D}A$ e $F\hat{C}I$, mostraremos que suas tangentes são iguais e, portanto, que as retas são paralelas.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

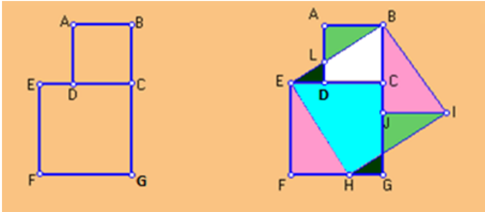
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{ab} - b}{a - \sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{ab} - b\right).\left(a + \sqrt{ab}\right)}{a^2 - ab} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

Sabemos que os triângulos EBH e JGD são semelhantes. Como o quadrilátero EBGJ é um paralelogramo, então os triângulos EBH e JGD são "mais do que semelhantes", são congruentes (semelhantes de razão 1). Analogamente, sabendo que o triângulo EFJ é semelhante ao triângulo HCD, e que o quadrilátero FCDJ é um paralelogramo, segue que os triângulos EFJ e HCD são congruentes.

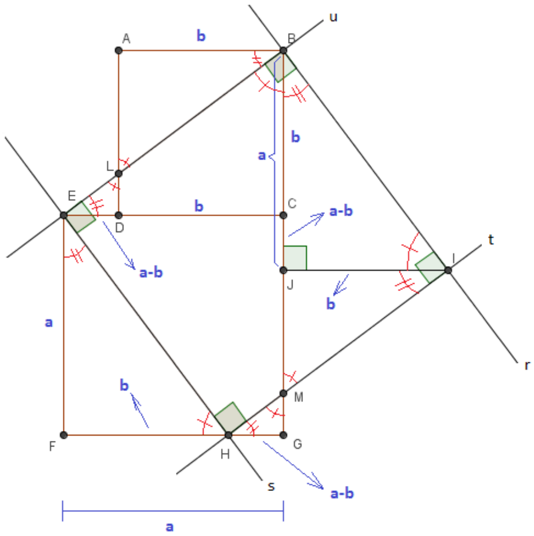
Acompanhando a figura que ilustra a demonstração você identificará as cinco peças que, quando organizadas de certa forma, preenchem o quadrado AEFG, e organizadas de outra forma preenchem o retângulo ABCD, o que mostra que os polígonos são equidecomponíveis[3].

[3] Vale observar ainda que a demonstração foi feita para o caso em que o lado do retângulo é menor do que duas vezes o lado do quadrado de mesma área. Para o caso em que o lado do retângulo é maior do que duas vezes o lado do quadrado, cortamos sucessivamente o retângulo em retângulos menores congruentes e "empilhamos" estes, de modo a formar um novo retângulo. Isso faz com que a situação recaia no primeiro caso analisado.

3) Dois quadrados justapostos e um quadrado de mesma área são equidecomponíveis.

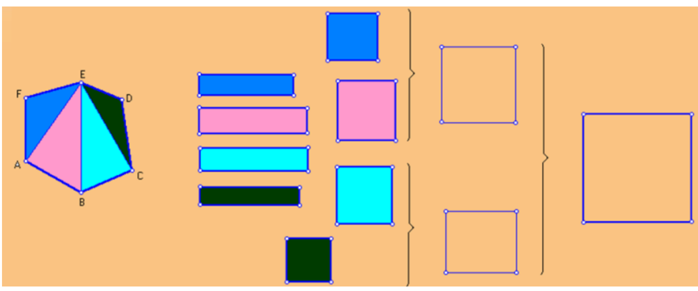


Na figura[4], a área do polígono ABGFED (composto pelos quadrados ABCD, de lado **b**, e ECGF, de lado **a**) é igual a do quadrado BEHI, como veremos a seguir.



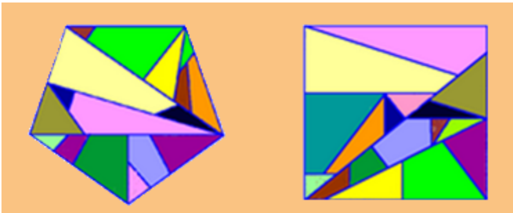
Traçamos a reta u por E e B e, em seguida, as retas r e s, perpendiculares à u por B e E. Marcamos H na intersecção de s com o lado do quadrado ECGF, e traçamos a reta t perpendicular à s por H. Denotamos por I a intersecção de r e t. Uma investigação angular (como se vê na figura) permite concluir que EBIH é um retângulo. Ocorre que os triângulos HEF e BEC são congruentes (note que seus ângulos são iguais e EF=EC). Os triângulos HEF e BEC também são congruentes (note que BI=EH, porque são lados opostos de um retângulo). Segue, portanto, que EBIH é um quadrado. Explorando a figura em detalhes, pode-se concluir ainda que os triângulos LED e MHG são congruentes, assim como também são congruentes os triângulos LAB e MJI. Segue, portanto, que dois quadrados são equidecomponíveis com outro quadrado.

4) Um polígono qualquer e um quadrado de mesma área são equidecomponíveis.

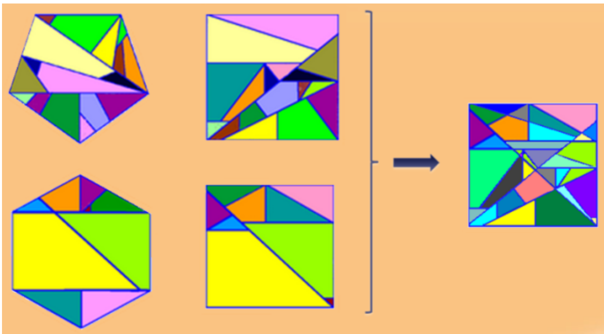


[4] Por meio de manipulação dessa figura também é possível demonstrar o teorema de Pitágoras.

Um polígono qualquer (representado na figura por ABCDEF) pode ser dividido em triângulos a partir de um dos seus vértices. Cada triângulo é equidecomponível com um retângulo (demonstração da etapa 1). Cada retângulo é equidecomponível com um quadrado (demonstração da etapa 2). Cada dois quadrados são equidecomponíveis com outro quadrado (demonstração da etapa 3). Segue, portanto, que um polígono qualquer é equidecomponível com o quadrado. Veja a seguir um exemplo da equidecomposição entre um pentágono e um quadrados.



5) Dois polígonos quaisquer de mesma área são equidecomponíveis.



Se temos dois polígonos quaisquer de mesma área, podemos equidecompor um deles com um quadrado, e o outro com outro quadrado (note que os quadrados têm mesma área). Sobrepondo as marcações dos dois quadrados obtidos nas equidecomposições, encontraremos um quadrado com os "peças" que, quando reorganizadas de forma conveniente irão recompor cada um dos polígonos[5].

Da nossa análise conclui-se que o impasse da "forma" da unidade deixou de ser um problema. Diante de um polígono não retangular, basta equidecompô-lo em um quadrado (e isso sempre será possível), e a "forma" da nossa unidade de medida de área será suficientemente boa para indicar a medida da sua área.

Vale observar ainda que toda a discussão aqui apresentada pode ser utilizada em oficinas de fabricação de tangram com estudantes da escola básica.

---

[5] A mesma questão investigada no plano, com os polígonos, poderia ser estendida ao espaço, com os poliedros. Dois poliedros dizem-se equidecomponíveis se um deles pode ser equidecomposto em um número finito de partes de tal forma que estas partes podem ser rearranjadas para formar o outro poliedro. É claro que dois poliedros equidecomponíveis são equivalentes, isto é, têm volumes iguais, porém, surpreendentemente a recíproca não é verdadeira, o que significa dizer que nem todos os poliedros com volumes iguais são equidecomponíveis. Esse fato foi demonstrado pela primeira vez por Max Dehn em 1900, tendo sido o primeiro da lista dos 23 problemas de Hilbert a ser resolvido.

A área de figuras "malcomportadas" no contexto da escola básica

Exploramos a algumas ideias relacionadas ao cálculo da área de polígonos mas, o que teríamos a dizer sobre figuras curvilíneas? (as tais figuras "malcomportadas"). A análise desse tipo de figura pode ser encaminhada por meio da passagem dos polígonos ao limite, porém, essa é uma discussão que escapa do universo de possibilidades de abordagem na escola básica. Por outro lado, podemos explorar a área de figuras malcomportadas na escola básica por meio de algumas atividades práticas, como veremos mais adiante. Antes dessa nova discussão, contarei uma breve historieta que talvez soe familiar a muitos dos leitores destas notas.

Certa ocasião eu estava em uma roda de amigos, todos na faixa de 40 a 50 anos de idade, e resolvi perguntar o que cada um se lembrava dos tempos de escola sobre o cálculo da área de figuras planas. A amostra de pessoas ali presentes não deve ser tomada como relevante para conclusões estatísticas mas, ainda assim, vale a pena comentar os resultados, que são bem interessantes.

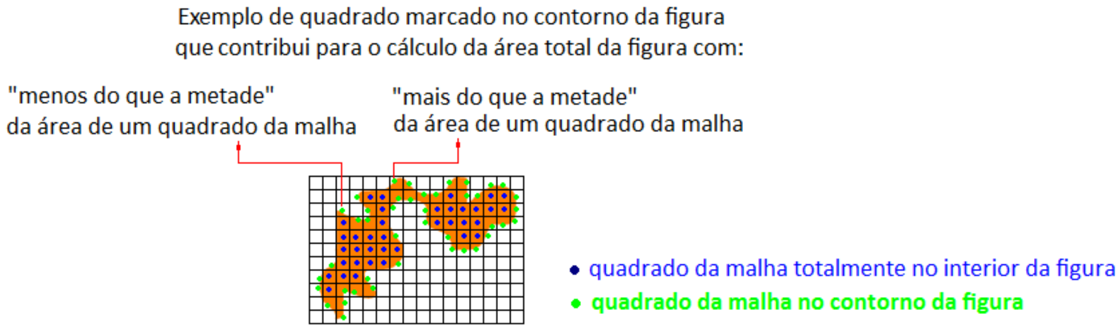
Todos os presentes sabiam calcular a área de retângulos e quadrados, sem problemas. Cerca de 2/3 das pessoas cantarolaram "base vezes altura dividido por dois", como se fosse um mantra, porém, poucos foram aqueles que conseguiram identificar um par base/altura em um triângulo obtusângulo que desenhei em um guardanapo de papel. A situação piorou quando perguntei sobre paralelogramos, losangos e trapézios, com menos de 1/3 das pessoas citando algum tipo de caminho convincente para o cálculo da área dessas figuras. A "pseudo-pesquisa" se encerrou com a pergunta: - E alguém seria capaz de sugerir alguma estratégia para o cálculo da área desta figura? E desenhei uma bem estranha no guardanapo.

Havia engenheiros no grupo, e foram eles os únicos que resolveram se pronunciar. Todos citaram o cálculo integral, matéria estudada nos primeiros anos dos cursos de ciências exatas, e que, dentre outras aplicações práticas, permite o cálculo de áreas quando conhecemos razoavelmente bem as equações associadas à curva fechada em questão. A esse pequeno grupo, fiz ainda uma pergunta: - E qual seria a equação associada à essa figura para que possamos aplicar ferramentas de integração no processo para obtenção da sua área? Fez-se o silêncio, e dali não conseguimos avançar muito na discussão.

Se por um lado o assunto perdeu interesse devido à dificuldade que o problema passou a apresentar, por outro todos ficaram curiosos em saber se existe alguma estratégia matemática para o cálculo de figuras "malcomportadas" como aquela desenhada no guardanapo.

Há sim formas de calcular a área de figuras “malcomportadas”, e elas são acessíveis a todos, sem necessidade do cálculo diferencial e integral. Usei a palavra “formas”, no plural, porque há mais de uma maneira de propor saídas para esse problema. Comecemos por um método simples que permite estimar a área da figura. Para esse método, teremos que desenhar a figura sobre uma malha quadriculada e contar os quadrados da malha que estão totalmente dentro da figura. É claro que a soma desses quadrados ainda não representa a área da figura porque, em seu interior, ainda existem “pedaços de quadrados” da malha que não foram contados. O desafio agora passa a ser o de estimar a área desses “pedaços” e, para isso, proponho uma estratégia relativamente simples, ainda que ela não seja absolutamente precisa, mas funciona muito bem em atividades com crianças bem pequenas.

Comece contando os quadrados que estão no contorno da figura, e que ainda não foram contados como quadrados inteiros no seu interior. Se você pensar um pouco sobre esses quadrados que foram contados perceberá que, parte deles, contribuiu para a área total da figura com cerca de “menos do que a metade” de um quadrado da malha, e parte deles contribuiu com cerca de “mais do que a metade” de um quadrado, como ilustra a figura a seguir:

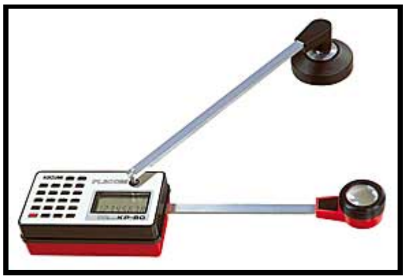


Admitindo que, em média, temos metade dos quadrados marcados no contorno da figura em uma das duas situações, e metade na outra, podemos estimar a área total da figura como sendo a soma dos quadrados da malha que estejam totalmente no interior da figura com “metade” do total de quadrados do contorno da malha que ainda não foram contados como quadrados inteiros dentro da figura. No caso da figura proposta, estimaríamos sua área por meio da conta 37+(42:2), ou seja, em 58 quadrados da malha. Se cada quadrado da malha tem área 1 cm², então a área aproximada da figura será de 58 cm².

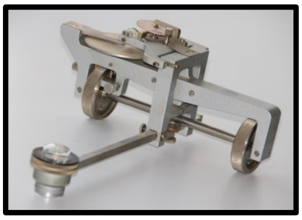
Alguns puristas talvez estejam se perguntado: - Isso é matemática?
Isso é matemática sim, afinal, temos um modelo, e compreendemos que processo tem implícito um erro. Também seria de interesse da matemática investigar quais são as condições de contorno da figura que implicariam em um erro maior ou menor no cálculo. Em atenção aos puristas, que não devem ter gostado muito desse método, vamos à discussão de outro método.

Na mesma malha quadriculada que você desenhou a figura “malcomportada”, desenhe agora um retângulo cujo interior esteja totalmente contido em quadrados da malha. Por exemplo, pode ser um retângulo de 10 quadrados (no comprimento) por 4 quadrados (na largura), cuja área será igual a 40 quadrados da malha. Agora recorte em papel cartão um molde desse retângulo e um molde da figura “malcomportada” cuja área estamos tentando calcular. Recorrendo à uma balança de precisão razoável, pese cada um desses moldes e estabeleça uma proporcionalidade direta entre a massa obtida (em gramas) e a área da figura (na unidade “quadrados da malha”). Por exemplo, se a balança acusar que a massa do retângulo é de 8,4 gramas, segue que cada quadrado da malha (em papel cartão) corresponde a “(8,4 ÷ 40) gramas”, ou seja, 0,21 g. Agora, considerando que a balança tenha acusado massa de 10,5 gramas para a figura “malcomportada”, então sua área poderá ser obtida por meio da conta 11,6÷0,21, ou seja, aproximadamente 55 quadrados da malha. Note que, nesse caso, a estimativa anteriormente feita pelo método de contar quadrado na malha não foi tão ruim, tendo cometido um erro de cerca de 5% em relação ao cálculo da área feito por meio da balança, que costuma ser mais preciso se os recortes das figuras forem feitos de forma cuidadosa, e se a balança for de boa precisão. O método de uso de balanças para medir áreas é bem conhecido desde a antiguidade. Em particular, no período renascentista Galileu usou esse método para estimar a área de uma figura gerada por uma ciclóide.

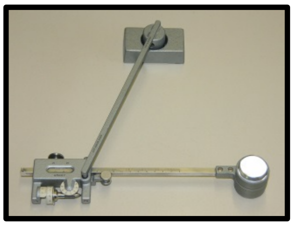
Por fim, vale a pena comentar que os matemáticos costumam ter nas mãos um arsenal diversificado e sofisticado para o cálculo da área de figuras “malcomportadas”. As armas usadas vão desde ferramentas estatísticas, como o método Monte Carlo [7], passando pelo teorema de Pick [8], até o cálculo diferencial e integral. No caso do cálculo diferencial e integral, um importante resultado, conhecido como teorema de Green, é o fundamento teórico utilizado na concepção de um fascinante instrumento denominado planímetro [9]. Planímetros permitem o cálculo da área de uma figura plana simplesmente fazendo com que o instrumento percorra mecanicamente o contorno delimitado pela figura. Planímetros são utilizados por topógrafos, cartógrafos, engenheiros e arquitetos para o cálculo da área de figuras irregulares desenhadas sobre mapas e plantas.



Planímetro digital



Planímetro linear



Planímetro Polar

Bibliografia

[1] NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[2] AABOE, A. Episódios da história antiga da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

[3] GONÇALVES, C. H. B., POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. Matemática Universitária, no. 47, SBM, 2009.

[4] LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[5] EUCLIDES (tradução: Irineu Bicudo). Os Elementos, São Paulo: Editora Unesp, 2009

[6] BOLTIANSKI, V. G. Figuras Equivalentes e Equidecompostas. São Paulo: Atual Editora, 1996.

[7] Método Monte Carlo (recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio/Unicamp). (http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1371)

[8] JUNIOR, F. S. da S., MICENA, F. P. Sugestões para aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica, 2014. (http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1_art5.pdf)

[9] COLLI, E. Planímetro linear. (http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/planimetro)