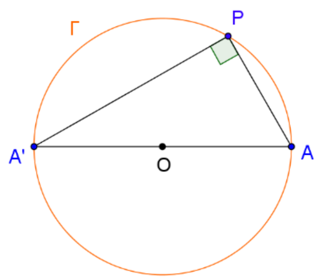
O TRIÂNGULO PSEUDO-RETÂNGULO E A HIPÉRBOLE EQUILÁTERA

SERGIO ALVES
IME-USP
salves@ime.usp.br

Sejam A e A' dois pontos distintos de um fixado plano euclidiano E. Se $\Gamma \subset E$ indica a circunferência de diâmetro AA', um resultado clássico da geometria afirma que $P \in \Gamma - \{A, A'\}$ se, e somente se, $m(\angle APA') = 90$.



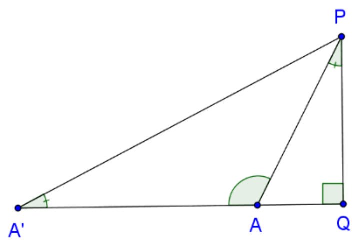
Alternativamente, tem-se que $\Gamma = \{A, A'\} \cup \{P \in E \mid m(\angle PAA') + m(\angle PA'A) = 90\}$.

Problema: Qual figura é o conjunto $\{A, A'\} \cup \{P \in E \mid |m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90\}$?

Definição. Um triângulo PAA' tal que $|m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90$ é chamado *triângulo pseudo-retângulo em P.*

Uma de suas principais propriedades é motivada por uma conhecida relação métrica válida para triângulos retângulos: *Sendo PAA' um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice P e sendo Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AA'*, *tem-se* $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$. Embora esta relação esteja presente na totalidade dos livros didáticos, não se destaca o fato que, neste caso, o ponto Q está entre os pontos A' e A (escreve-se $A' - Q - A$). Vejamos como esta relação se apresenta para um triângulo pseudo-retângulo.

Atividade 1. Seja PAA' um triângulo satisfazendo $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$.
(a) Sendo Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AA', explique porque $A' - Q - A$, $Q - A' - A$, $Q = A$ e $Q = A'$ são situações que não podem ocorrer. Conclua que $A' - A - Q$.
(b) Mostre que $\Delta PQA \sim \Delta A'QP$ e conclua que $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$.



Atividade 2. Seja PAA' um triângulo tal que a projeção ortogonal Q do vértice P sobre a reta AA' satisfaz $A' - A - Q$ e $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$. Mostre que $\Delta PQA \sim \Delta A'QP$ e conclua que $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$.

Em resumo, até aqui você provou o seguinte fato: Dado um triângulo PAA', seja Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AA'. Nessas condições, tem-se $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$ se, e somente se, $A' - A - Q$ e $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$.

De modo inteiramente análogo prova-se que $m(\angle PA'A) - m(\angle PAA') = 90$ se, e somente se, tem-se $Q - A' - A$ e $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$. Segue assim nosso primeiro resultado.

Lema 1. *Sendo Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AA' tem-se que PAA' é um triângulo pseudo-retângulo em P se*, *e somente se*, *Q não pertence ao segmento AA' e* $(PQ)^2 = (AQ)(A'Q)$.

Atividade 3. (opcional) Mostre que as propriedades abaixo também caracterizam o fato de um triângulo PAA' ser pseudo-retângulo em P:

(a) *As bissetrizes dos ângulos interno e externo de vértice P formam*, *com a reta AA'*, *ângulos agudos de medida* 45.

(b) *A reta tangente em P à circunferência circunscrita ao triângulo PAA' é perpendicular à reta AA'*.

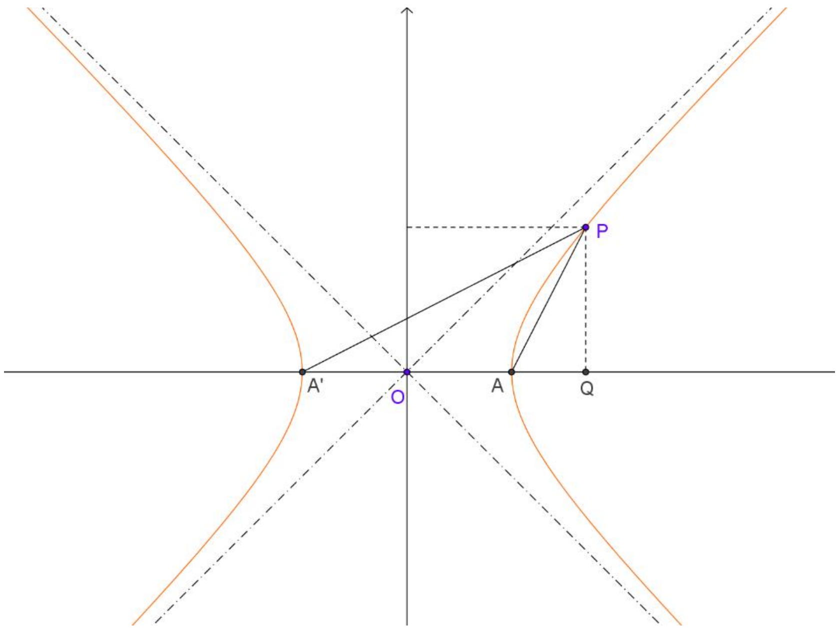
Retornando ao nosso problema considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que o eixo Ox contenha os pontos A e A' e o eixo Oy seja a mediatriz do segmento AA'. Sendo $a > 0$ tal que $AA' = 2a$, suponha $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$.

Atividade 4. Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário não pertencente à reta AA'.

(a) Quais as coordenadas da projeção ortogonal Q de P sobre a reta AA'?

(b) Verifique que $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$ se, e somente se, $x > a$ e $x^2 - y^2 = a^2$.

(c) Verifique que $m(\angle PA'A) - m(\angle PAA') = 90$ se, e somente se, $x < -a$ e $x^2 - y^2 = a^2$.

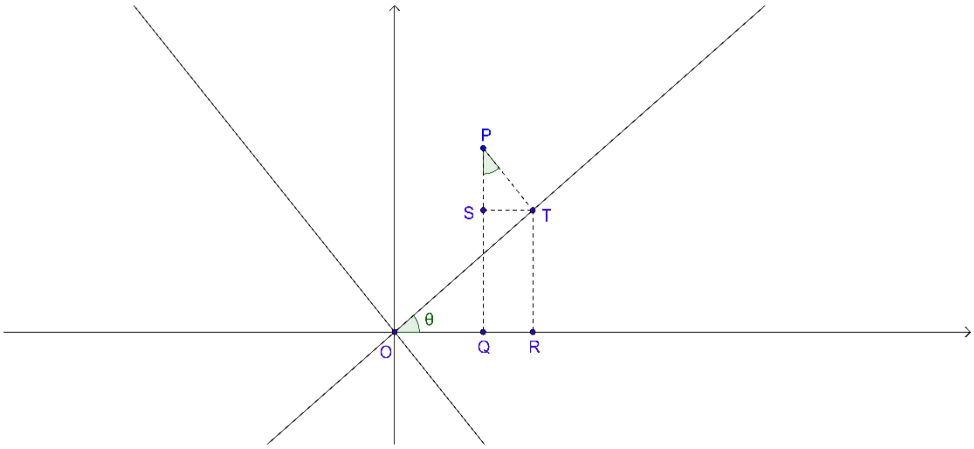


A igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ (ou, equivalentemente, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$) nada mais é do que a equação reduzida de uma *hipérbole equilátera* com vértices A e A'. A condição $x > a$ nos diz que $P = (x, y)$ descreve o ramo dessa hipérbole que contém A excluído o próprio ponto A. Por outro lado, a condição $x < -a$ nos diz que o ponto P descreve o ramo que contém A' excluído o próprio ponto A'.

Você talvez não reconheça de imediato a igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ como a equação reduzida de uma hipérbole equilátera. Um procedimento mais familiar é considerar a hipérbole equilátera como o gráfico da função $f(x) = \frac{k}{x}$ onde k é um número real não nulo. Na próxima atividade pretende-se verificar a equivalência entre as duas formas.

Atividade 5. Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que os novos eixos coordenados OX e OY sejam obtidos a partir dos antigos eixos Ox e Oy por uma rotação de ângulo θ em torno da origem O. Sejam (x, y) e (X, Y) as coordenadas de um mesmo ponto arbitrário P do plano em relação ao antigo e ao novo sistema ortogonal, respectivamente.

(a) Mostre que $x = X\cos\theta - Y\text{sen}\theta$ e $y = X\text{sen}\theta + Y\cos\theta$. (*Sugestão*: Na figura abaixo tem-se $m(\angle ROT) = \theta = m(\angle SPT)$, $x = OQ$, $y = PQ$, $X = OT$ e $Y = PT$.)



(b) Faça $\theta = -45$ no item (a). Note que, neste caso, os novos eixos coordenados OX e OY são as assíntotas da hipérbole equilátera. Verifique que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y)$ e mostre que a igualdade $x^2 - y^2 = a^2$ é transformada na equação $XY = \frac{a^2}{2}$.

Atividade 6. (opcional) Sejam F e F' dois pontos distintos de um fixado plano euclidiano E e seja a um número real positivo de modo que $2a < FF'$. A *hipérbole de focos F e F′ e semieixo transverso a* é o conjunto formado pelos pontos $P \in E$ tais que $|PF - PF'| = 2a$. Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que o eixo Ox contenha os pontos F e F' e o eixo Oy seja a mediatriz do segmento FF'. Sendo $c > 0$ tal que $FF' = 2c$, suponha $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$.

(a) Mostre que $P = (x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$. Sendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, a igualdade $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é chamada a *equação reduzida* da hipérbole. Os pontos $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$ pertencem à hipérbole e são chamados *vértices* da hipérbole.

(b) Na equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ explicite $y = f(x)$ com $y \geq 0$ e mostre que $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{b}{a}x - f(x)\right] = 0 = \lim_{x\to-\infty} [-\frac{b}{a}x - f(x)]$. Para $y = f(x)$ com $y \leq 0$ mostre que $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) + \frac{b}{a}x\right] = 0 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \frac{b}{a}x]$. As retas de equação $y = \pm\frac{b}{a}x$ são denominadas *assíntotas* da hipérbole. No caso em que estas assíntotas são perpendiculares, ou seja, quando $a = b$, a hipérbole se chama *equilátera*.

Os resultados desenvolvidos até aqui estabelecem a prova do principal teorema deste trabalho e respondem ao nosso problema.

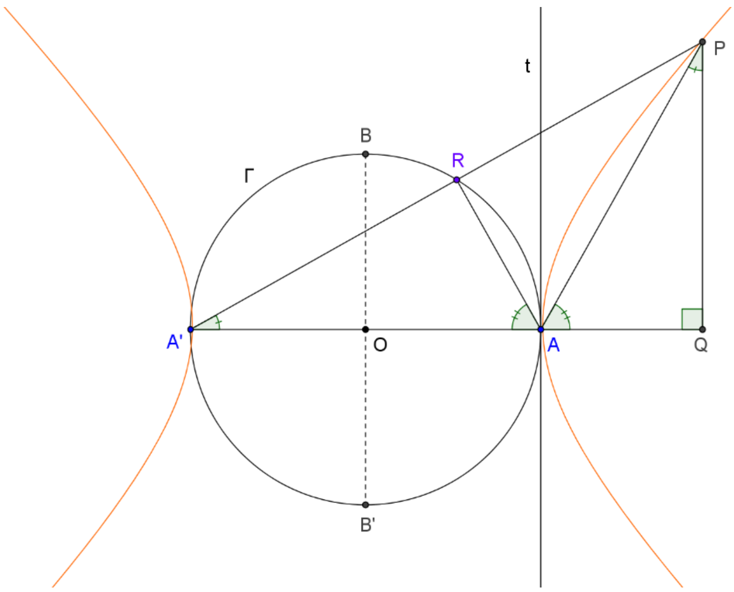
Teorema 1. *Sejam A e A' dois pontos distintos de um fixado plano euclidiano E. Nessas condições, a reunião $\{A, A'\} \cup \{P \in E \mid |m(\angle PAA') - m(\angle PA'A)| = 90\}$ coincide com a hipérbole equilátera de vértices A e A'.*

O resultado demonstrado no Teorema 1 justifica uma construção muito simples que permite obter, com régua e compasso, os pontos de uma hipérbole equilátera de vértices A e A'. Vejamos como.

Atividade 7.

(a) Assinale, na sua folha, dois pontos distintos A e A' e desenhe a circunferência Γ de diâmetro AA'.

(b) Trace a reta t tangente a Γ em A e o diâmetro BB' de Γ perpendicular ao segmento AA'.



(c) Escolha um ponto arbitrário R da semicircunferência BB' de Γ que contém A e trace a reta simétrica da reta AR em relação à reta tangente t. Indique por u tal reta.
(d) Sendo P o ponto em que a reta $A'R$ intersecta u, mostre que P pertence ao ramo da hipérbole equilátera de vértices A e A' que contém A. (*Sugestão*: Basta provar que $m(\angle PAA') - m(\angle PA'A) = 90$.) Note que se $R = B$ ou $R = B'$ as retas $A'R$ e u são retas paralelas e, neste caso, o ponto P não existe.
(e) Permutando-se os papéis de A e A', obtêm-se o ramo da hipérbole equilátera de vértices A e A' que contém A'.

Finalizamos este trabalho com a proposta de uma atividade investigativa que deve ser desenvolvida preferencialmente com o auxílio de um programa de geometria dinâmica como, por exemplo, o GeoGebra. Tais programas permitem o traçado imediato de uma hipérbole equilátera considerando-a, por exemplo, como a curva cuja equação, num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, é dada por $xy = k$ onde k é um número real não nulo.

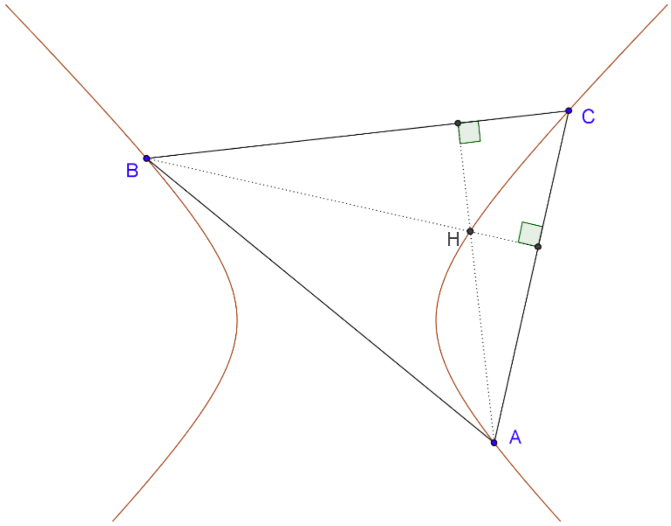
Atividade 8.
(a) Trace a hipérbole equilátera $\mathcal{H}$ de equação $xy = 1$ e assinale três pontos não colineares A, B, C pertencentes a $\mathcal{H}$. Construa o ortocentro H do triângulo ABC (lembre-se que H é o encontro das retas suportes de duas alturas quaisquer do triângulo). O que você observa? Essa observação permanece válida para outras escolhas de pontos não colineares A, B, C pertencentes a $\mathcal{H}$?
(b) Repita a construção efetuada no item anterior para a hipérbole equilátera de equação $xy = -3$. Sua conjectura continua valendo?

O resultado esperado na atividade 8 é uma notável propriedade da hipérbole equilátera descoberta pelos matemáticos franceses Brianchon e Poncelet (veja [2]). Eis o seu enunciado.

Teorema 2. *O ortocentro de um triângulo inscrito numa hipérbole equilátera também pertence a essa hipérbole*.

A próxima atividade apresenta uma prova bem simples desta propriedade.

Atividade 9. Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que a hipérbole equilátera dada tenha equação $xy = k$, k um número real não nulo. Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $y = k/x$.
(a) Sejam $A = (a, k/a)$, $B = (b, k/b)$ e $C = (c, k/c)$ três pontos não colineares pertencentes à hipérbole. Explique porque nenhuma das retas AB, BC, AC é, neste sistema de coordenadas, uma reta vertical ou horizontal.
(b) Escreva a equação da reta u que passa por A e é perpendicular à reta BC.
(c) Escreva a equação da reta v que passa por B e é perpendicular à reta AC.
(d) A intersecção das retas u e v é o ortocentro $H = (x_1, y_1)$ do triângulo ABC. Determine as coordenadas x_1 e y_1 e verifique que $x_1 y_1 = k$.



Uma pergunta natural que surge a partir do teorema acima é saber se essa propriedade notável caracteriza a hipérbole equilátera. Surpreendentemente a resposta é afirmativa. No capítulo 3 da referência [1] encontram-se várias demonstrações (baseadas nas propriedades projetivas das cônicas) do seguinte fato não trivial: *o ortocentro de um triângulo inscrito numa cônica não degenerada* $\mathcal{C}$ *também pertence a essa cônica se, e somente se,* $\mathcal{C}$ *é uma hipérbole equilátera*.

Referências bibliográficas

[1] Akopyan A.V. e A.A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, Mathematical World (AMS), Vol 26, 2008.

[2] Brianchon C.J. e J.V. Poncelet, *Géométrie des courbes. Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données*, Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11, 1820-1821.