OFICINA 10

GEOMETRIA E ARTE: O LOGO DO *CAEM 30 ANOS*

Aline dos Reis Matheus, CAEM IME-USP, alinerm@ime.usp.br

Marcos Alves dos Santos, CAEM IME-USP , malvess@ime.usp.br

Resumo

O logotipo CAEM 30 anos foi criado para satisfazer ao desejo da equipe de ter um símbolo especial para comemorar os 30 anos do CAEM. No processo de criação do logo, utilizamos nosso interesse pela arte e nossos conhecimentos de geometria, partindo de um problema envolvendo circunferências tangentes. Este trabalho tem como objetivo propor uma investigação acerca da geometria contida nesse logotipo, por meio da utilização do software Geogebra.

Palavras-chave: Geometria. Logotipo. Circunferências Tangentes. Cônicas. Geometria Dinâmica.

Introdução

A criação de um logotipo para o evento que marca o aniversário de 30 anos do CAEM constituiu uma tarefa desafiadora para a nossa equipe, em função da nossa inexperiência na área de *design*. Apesar disso, conseguimos cumprir a tarefa usando os recursos disponíveis: algum interesse pelas artes plásticas, uma boa dose de geometria e o auxílio do software *Geogebra*. Esses recursos se combinaram a partir de um passatempo que pode conduzir a problemas geométricos interessantes: a criação de mandalas usando régua e compasso.

O termo mandala, que é oriundo do sânscrito e significa "círculo" ou "completude", costuma designar figuras planas que se organizam em torno de um centro – muitas vezes, são círculos, mas nem sempre (Figura 1).

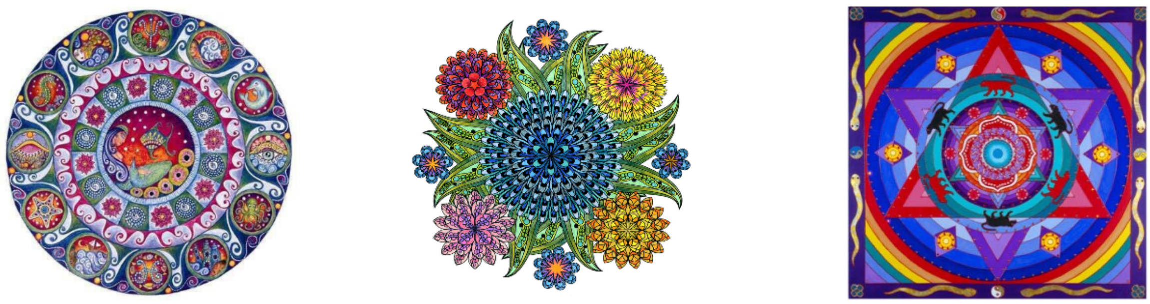

Figura 1 – Exemplos de mandalas

As mandalas podem constituir um interessante objeto de estudo para a Geometria, uma vez que a beleza e a harmonia expressas dependem da estrutura geométrica subjacente a suas formas. Na sala de aula de matemática, a construção de mandalas pode provocar problemas e descobertas interessantes, além de favorecer a destreza no manuseio do compasso.

A estrutura geométrica do logo *CAEM 30 anos* (Figura 2) baseia-se na solução de um problema que encontramos ao tentar construir, com régua e compasso, uma mandala formada por uma sequência de circunferências tangentes internamente. Nessa mandala, os "vãos" criados entre as circunferências tangentes deveriam ser preenchidos com pequenas circunferências, todas tangentes às anteriores e entre si (Figura 3). Onde estariam os centros dessas pequenas circunferências?

Figura 2

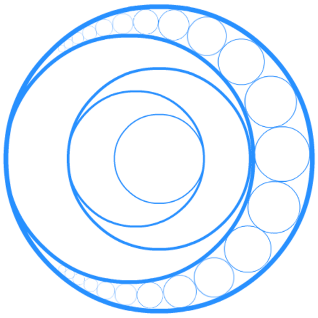

Figura 3

Investigação geométrica

A investigação da estrutura geométrica do logotipo se dará por meio de um encadeamento de atividades e de resultados validados tanto empírica quanto dedutivamente.

Atividade 1: No arquivo *Logo1.ggb*, a circunferência S_1, de centro O_1, tem raio constante R_1; já a circunferência S_2, de centro O_2, tem raio R_2 variável. Manipule o ponto O_2 e varie R_2, para investigar em quais situações a intersecção de S_1 com S_2 é exatamente um ponto.

Definição 1: Sejam O um ponto de um plano euclidiano E e r um número real positivo. A ***circunferência S*** de centro O e raio r é o conjunto formado por todos os pontos P de E tais que $OP = r$. Um ponto X de E tal que $OX < r$ é denominado ***ponto interior de S*** e quando $OX > r$ dizemos que X é ***ponto exterior de S***.

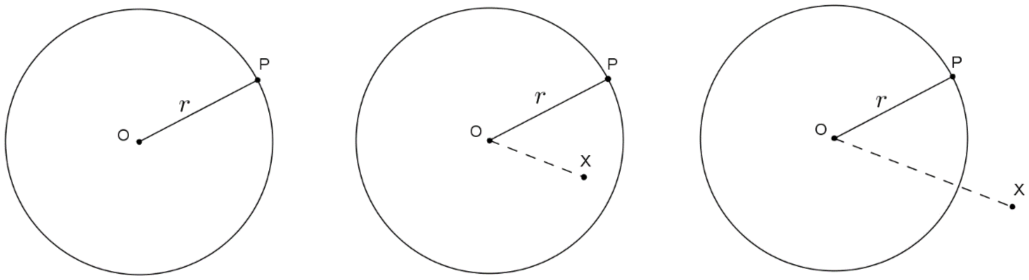

Figura 4

Circunferências tangentes – reflexão sobre definições e abordagens

A escolha da forma de apresentação de um conceito matemático passa pela análise das definições e da forma como elas direcionam um determinado encadeamento de conceitos. Convidamos o professor a fazer uma pequena reflexão sobre estas questões: como os livros didáticos definem circunferências tangentes? E os livros acadêmicos, como o fazem? Quando optamos por uma das definições, é possível que as demais decorram dela, como propriedades?

Diferentes formas de definir circunferências tangentes se originam de diferentes formas de estudar a posição relativa de duas circunferências: a partir do número de pontos de intersecção (0, 1 ou 2); a partir da comparação entre a distância entre os centros e a soma/diferença entre os raios; a partir da posição relativa entre essas circunferências e uma mesma reta. Cada uma dessas abordagens favorece alguns resultados e dificulta outros.

Para os nossos propósitos, escolhemos a definição abaixo.

Definição 2: Diremos que S_1 e S_2 são ***circunferências tangentes*** quando possuem um único ponto em comum. Esse ponto será chamado ***ponto de tangência***.

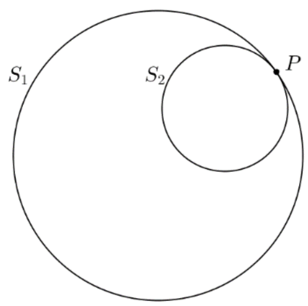

Figura 5

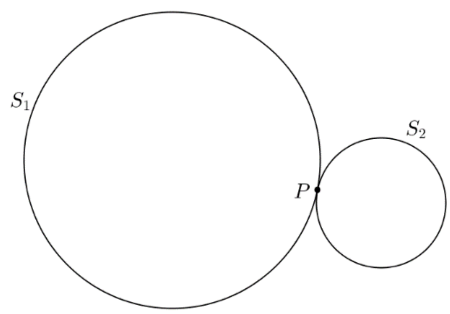

Figura 6

Diremos que S_1 e S_2 se tangenciam ***internamente*** (figura 5) quando possuem um único ponto em comum e os demais pontos de uma delas (de S_1 ou de S_2) pertencem ao interior da outra. Se S_1 e S_2 possuírem um único ponto em comum e os demais pontos de uma qualquer delas (de S_1 e de S_2) pertencerem ao exterior da outra, então diremos que elas se tangenciam ***externamente*** (figura 6).

Teorema: Seja P um ponto da intersecção de duas dadas circunferências S_1 e S_2, distintas, de centros O_1 e O_2, respectivamente. S_1 e S_2 são tangentes se, e somente se, P, O_1 e O_2 são pontos colineares.
(Deixamos essa demonstração a cargo do leitor.)

É importante observarmos, ainda, que quando S_1 e S_2 se tangenciam externamente, então $O_1 - P - O_2$ (essa notação quer dizer que P está entre O_1 e O_2); e quando S_1 e S_2 se tangenciam internamente, de modo que os pontos de S_2 (exceto P) estejam no interior de S_1, então $O_1 - O_2 - P$.

Atividade 2: No arquivo *Logo2.ggb*, são dadas duas circunferências concêntricas S_1 e S_2, de raios R_1 e R_2, respectivamente, tais que $R_1 > R_2$.
a) Construa uma circunferência S_3 tangente a S_1 internamente e tangente a S_2 externamente.

b) Construa uma circunferência S_4 com as mesmas propriedades de S_3, de forma que S_4 tangencie também S_3, externamente.

A noção de lugar geométrico

Na próxima atividade, vamos utilizar o conceito de lugar geométrico. Esse é um conceito que merece reflexão, uma vez que, geralmente, não é um tópico de ensino direto, mas permeia diversos outros tópicos e é central em muitos problemas de Geometria.

Definição 3: Designaremos por ***lugar geométrico*** um conjunto de pontos (do plano ou do espaço) que satisfazem a uma determinada propriedade.

O exemplo clássico é o da circunferência, que é o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem à seguinte propriedade: equidistam de um ponto dado (centro da circunferência).

Os problemas que envolvem a determinação de um lugar geométrico nem sempre são fáceis, pois exigem grande capacidade de imaginação e visualização geométrica. Em vez de tentar imaginar de uma só vez o lugar geométrico procurado, a estratégia de investigação mais promissora parece ser a imaginação de um ponto que se move (no plano ou no espaço), mas mantendo invariável a propriedade de interesse. Da imaginação, sai uma conjectura, que, depois, precisa ser validada dedutivamente, para ser considerada um conhecimento matemático seguro.

Os *softwares* de geometria dinâmica podem ser especialmente úteis na etapa de elaborar conjecturas, justamente porque, como indica o termo "dinâmica", um ponto pode ser movimentado, sem que se desfaça a estrutura da construção geométrica elaborada inicialmente. Por outro lado, o recurso aos *softwares*, se excessivo, limita o exercício da livre imaginação, que também tem seu valor pedagógico. Uma das alternativas possíveis é propor um exercício de imaginação antes de fazer construções no *software*.

Essas reflexões sugerem que o uso da geometria dinâmica, na Escola Básica, pode ter como função tanto o *estabelecimento de conjecturas* quanto a *validação empírica de conjecturas prévias*. A discussão das limitações dessas validações empíricas e da necessidade de uma validação dedutiva é um processo que merece o cuidado dos professores, no sentido de não ser negligenciado e também no sentido de ser gradativo e intencional, respeitando o desenvolvimento da racionalidade dos alunos.

Propriedade P: dadas duas circunferências S_1 e S_2, diremos que uma terceira circunferência ***S satisfaz P*** se S tangencia uma delas internamente e tangencia a outra externamente.

Atividade 3: No arquivo *Logo3.ggb*, são dadas duas circunferências S_1 e S_2 tangentes internamente, de raios R_1 e R_2, respectivamente, com $R_1 > R_2$.

a) Construa uma circunferência S_3 que satisfaça P.

b) Construa a circunferência $S_1{}'$ de centro O_1 e raio $(R_1 - 1)$ e a circunferência $S_2{}'$ de centro O_2 e raio $(R_2 + 1)$. Verifique que os pontos de intersecção de $S_1{}'$ com $S_2{}'$ são centros de circunferências que satisfazem P. Construa-as.

c) Utilize a estratégia do item anterior para construir novas circunferências com a propriedade P.

Definição 4: Sejam F e F' pontos de um plano euclidiano E e seja k um número real positivo, de modo que $k > FF'$. A ***elipse de focos F e F' e constante k*** é o conjunto formado pelos pontos P de E tais que $PF + PF' = k$.

Atividade 4 (sem o Geogebra): Sejam S_1 e S_2 circunferências que se tangenciam internamente, de centros O_1 e O_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente, sendo $R_1 > R_2$. Mostre que o lugar geométrico dos centros das circunferências que satisfazem a propriedade ***P***, enunciada anteriormente, é uma elipse de focos O_1 e O_2 e constante $k = R_1 + R_2$.

Atividade 5: Construa, no Geogebra, a base geométrica do logo do *CAEM 30 anos*.

Resolução da Atividade 4

Queremos demonstrar que *o lugar geométrico dos centros das circunferências que satisfazem a propriedade* ***P*** *é uma elipse de focos* O_1 *e* O_2 *e constante* $k = R_1 + R_2$. Para isso, vamos lembrar a ***hipótese*** de que partimos: S_1 *e* S_2*, de centros* O_1 *e* O_2*, respectivamente, são circunferências dadas que se tangenciam internamente, de modo que os pontos de* S_2*, com exceção do ponto de tangência, estão no interior de* S_1.

Então, vamos admitir que S_3 seja uma circunferência de centro O_3 que satisfaça ***P*** e vamos mostrar que $O_1O_3 + O_2O_3$ é constante.

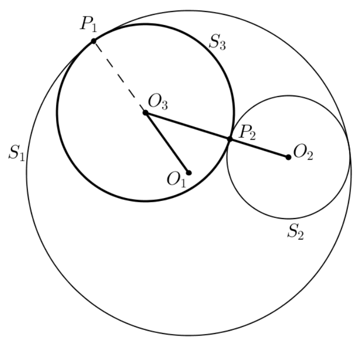

Figura 7

Sejam $P_1 \in S_1 \cap S_3$ e $P_2 \in S_2 \cap S_3$. Como S_1 e S_3 se tangenciam internamente com S_3 no interior de S_1, então $O_1 - O_3 - P_1$. E devido a S_2 e S_3 se tangenciarem externamente, então $O_2 - P_2 - O_3$.

Agora note que

$O_1 - O_3 - P_1 \;\Rightarrow\; O_1P_1 = O_1O_3 + O_3P_1$, ou $\boxed{O_1O_3 = O_1P_1 - O_3P_1 = R_1 - R_3}$

$$O_2 - P_2 - O_3 \;\Rightarrow\; \boxed{O_2O_3 = O_2P_2 + P_2O_3 = R_2 + R_3}$$

Finalmente, somando termo a termo as duas igualdades destacadas, temos que $O_1O_3 + O_2O_3 = R_1 + R_2$, que é constante.

Portanto, o lugar geométrico procurado é uma elipse de focos O_1 e O_2 e constante $k = R_1 + R_2$, como queríamos demonstrar.

Referências

BARBOSA, J. **Geometria Euclidiana Plana.** Edição revista. Rio de Janeiro: SBM, 1995. (Coleção do Professor de Matemática).

DANTE, L.**Matemática 3ª Série**. 1ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.

MACHADO, A. **Matemática na escola do segundo grau**. 1ª Edição. São Paulo: Atual Editora, 1994. Vol. 3.

MOISE, E.; DOWNS, F. **Geometria Moderna: parte II**. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1976.

PAIVA, M. **Matemática Volume 3**. 1ª Edição. São Paulo: Editora Moderna, 1995.

REZENDE, E.; QUEIROZ, M. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.

SMOLE, K.; DINIZ, I. **Matemática Ensino Médio**. 6ª ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática**. 1ª Edição. São Paulo: Editora FTD, 2010. (Coleção novo olhar; v. 3).

VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. **Educação e Matemática**, n. 63, p.31-36, Maio/Junho de 2001.