

## OFICINA 6

### ELABORAÇÃO DE CONJECTURAS EM GEOMETRIA PLANA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA

---

Elisabete Teresinha Guerato, Instituto Federal de São Paulo  
Vera Helena Giusti de Souza, Univ. Anhanguera de São Paulo

Michael de Villiers é sul-africano e professor de Matemática e de Ciências. É um conferencista regular em conferências nacionais e internacionais sobre Matemática e Educação Matemática e membro de várias organizações internacionais, como por exemplo o Grupo de Trabalho em Geometria do PME (Psychology of Mathematics Education), COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications), MAA (Mathematical Association of America) e MAS (American Mathematical Society). Seus principais interesses de pesquisa são: Geometria, aplicações e modelagem e História e Filosofia da Matemática. Desde 1997, é vice-presidente do Comitê da Sociedade Olímpica de Matemática, responsável por definir e organizar a Olimpíada de Matemática na África do Sul.

Publicou sete livros, dentre os quais destacamos "Repensando a Prova com Sketchpad", no qual trata da importância da demonstração no conhecimento matemático e é esse aspecto da sua obra que destacamos no que segue.

Segundo De Villiers, um dos maiores problemas enfrentados pelo professor é que os alunos, em geral, não compreendem a necessidade das demonstrações nas aulas de Matemática da Educação Básica e costumam questionar os professores sobre isso, principalmente quando estão estudando Geometria e o resultado a ser provado parece óbvio ou facilmente percebido, quando verificado empiricamente.

De Villiers se propõe a responder a seguinte pergunta, em seu texto: "Que funções tem a demonstração na própria matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?" (De Villiers, 2001, p. 31). Para tanto, analisa e propõe diversas funções da demonstração em Matemática que, segundo ele, não pode ser encarada apenas como uma forma de convencer os cépticos de que algum teorema é verdadeiro: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual.

### **A demonstração como processo de verificação/convencimento**

De Villiers recomenda que se façam testes empíricos antes de se começar uma demonstração formal, pois esses podem auxiliar na demonstração e diminuir a chance de erros e inconsistências.

Ao se aplicar esta recomendação nas aulas de Geometria da Educação Básica, defendemos que esses testes podem e devem ser feitos com o uso do computador, por meio de *softwares* de Geometria Dinâmica, pois estes possibilitam a verificação de uma propriedade em muitos casos particulares, o que faz com que o aluno perceba que pode ser válida sempre. É trabalho do professor convencer seus alunos que é preciso demonstrar o que foi observado.

### **A demonstração como processo de explicação**

Muitas vezes podemos explorar, por meio de métodos empíricos, experimentais ou numéricos, determinada conjectura, mas apenas a demonstração poderá explicar porque ela é verdadeira. Neste caso, a demonstração não apenas verificará a validade da propriedade elencada, mas explicará porque isso acontece.

De Villiers apresentou em seu texto alguns exemplos onde a demonstração foi essencial para que se explicassem as conjecturas, entre eles podemos destacar as descobertas de Feigenbaum em Geometria Fractal, as descobertas de Képler, que foram validadas por Newton em relação às órbitas dos planetas e o Teorema das Quatro Cores, demonstrado por Appel e Haken. Todas essas conjecturas já se sabiam certas antes da demonstração, que não serviu apenas como verificação de resultados mas, principalmente, como explicação desses resultados, que ficaram mais claros após as demonstrações.

Na Educação Básica, esta função é muito utilizada pelo professor ao apresentar uma teoria para seus alunos. Para o estudante, a teoria ganha mais credibilidade quando vê o professor demonstrando a validade, mesmo que esta demonstração não seja cobrada do estudante. Quando, mais adiante, o aluno tiver necessidade de efetuar uma demonstração sozinho, a realizada pelo professor servirá de exemplo e motivação para tanto.

### **A demonstração como processo de descoberta**

A maioria das descobertas em Geometria parte de métodos intuitivos ou quase empíricos; no entanto, não são poucos os resultados que nunca apareceriam de forma intuitiva ou empírica, pois resultam de processos puramente dedutivos. É improvável que, por exemplo, as geometrias não euclidianas pudessem surgir de maneira empírica ou intuitiva. Assim, podemos entender a demonstração não só como um processo para se mostrar que resultados descobertos intuitivamente são verdadeiros, mas também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

De Villiers dá como exemplo o teorema que diz que o quadrilátero formado a partir dos pontos médios de um quadrilátero qualquer, cujas diagonais são perpendiculares, é sempre um retângulo. Com o uso de um software de geometria dinâmica, podemos concluir que isso acontece quando se tem tal quadrilátero (com diagonais perpendiculares), mas não generalizar. A descoberta da generalização necessita de uma demonstração formal.

Assim, ao tentar verificar que um resultado é verdadeiro, podemos chegar a outros resultados inesperados ou ainda a generalizações não percebidas anteriormente, o que mostra que a demonstração também pode ter a função de descoberta.

Na Educação Básica, esta função da demonstração pode ser explorada: coloca-se um problema para que o aluno o explore com um *software* de Geometria Dinâmica e elabore conjecturas. Assim, ele pode descobrir propriedades dos objetos estudados e perceber caminhos que levem à demonstração.

### **A demonstração como processo de sistematização**

Por mais experimentos empíricos ou intuitivos que façamos, não conseguimos checar todas as possibilidades para podermos afirmar que uma conjectura é verdadeira; apenas a demonstração poderá nos levar a concluir que ela é verdadeira sem sombra de dúvida e essa conclusão surge a partir da sistematização.

De Villiers apresenta algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva.

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas.
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos

não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação econômica de resultados.

- Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas.
- Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação de aplicabilidade dos seus axiomas e definições.
- Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes. (DE VILLIERS, 2001, p. 34)

Embora notemos elementos de verificação nessa função, o principal objetivo não é o de verificação, mas de organizar as afirmações que estão isoladas, numa ordem coerente e unificada. A explicação também está presente nesse contexto, com o objetivo de uma explicação geral do fenômeno.

Na Educação Básica, esta função está presente quando o aluno organiza os passos da demonstração, tomando cuidado para utilizar apenas os dados que estão na hipótese do teorema a ser demonstrado. Para tanto, o professor pode e deve incentivar que o aluno comece a demonstrar o mais cedo possível, mesmo que inicialmente estas demonstrações não passem de provas empíricas e uma forma de se conseguir esse intento pode ser usando *softwares* de Geometria Dinâmica, que ajudam o aluno a encontrar os caminhos da demonstração.

### **A demonstração como meio de comunicação**

A interação entre matemáticos se faz por meio das suas descobertas em Matemática e estas são organizadas na forma de demonstrações de teoremas. Ao se comunicar entre si, os matemáticos observam, julgam, identificam falhas e inconsistências nos teoremas demonstrados e isso é uma forma de comunicação. Ao comunicar as descobertas, por meio de demonstrações, os matemáticos têm como julgar o trabalho, verificar se há inconsistências em suas conclusões ou até ter acesso a contra-exemplos que os levem a pensar mais no assunto e chegar a novas conclusões.

Esta função da demonstração pode ser observada na Educação Básica quando o aluno analisa uma demonstração feita por um colega e tenta entendê-la. Com essa

análise, o aluno poderá ser capaz de julgar e discutir argumentos e, com isso, desenvolver sua capacidade de realizar estas ou outras demonstrações.

### **A demonstração como desafio intelectual**

Para os matemáticos, a demonstração é um desafio pelo qual mostra a sua competência em fazer Matemática. Demonstrar um teorema, para um matemático, equivale a montar um quebra cabeças para um leigo ou ainda a escalar uma montanha ou completar uma maratona para um atleta. Por mais que essa montanha já tenha sido escalada por outros, o desafio de completar essa jornada traz uma satisfação pessoal ao atleta, semelhante à satisfação que um matemático tem ao demonstrar um teorema, mesmo que este já tenha sido demonstrado por outros matemáticos.

Para o aluno da Educação Básica, esta função está presente quando começa a realizar demonstrações e a se interessar por elas. Cada demonstração que realiza é um desafio que vence, por mais simples que seja, e é ainda um incentivo para continuar demonstrando outros teoremas propostos. Para esta função, mais do que para qualquer outra, o papel do professor de Matemática é essencial, pois cabe a ele mostrar os caminhos que o aluno deve trilhar para chegar cada vez mais próximo da formalidade das demonstrações.

Segundo De Villiers (2001), essa lista de funções da demonstração não deve ser considerada completa, pois com certeza podem-se elencar outras. Também não devem ser consideradas independentes - não são únicas em cada situação - ou hierárquicas - um indivíduo pode desenvolvê-las em qualquer ordem - pelo menos assim entendemos. Em cada situação, podemos encontrar uma função prevalecendo em detrimento das outras ou até verificar que naquela situação uma ou mais funções não podem ser consideradas. O que defendemos é que existem diversas funções da demonstração, todas importantes e que devem ser "aprendidas", ao longo da vida escolar de cada indivíduo.

## **ENSINO DA DEMONSTRAÇÃO COM O GEOGEBRA**

Uma forma de se convencer de que uma conjectura é verdadeira, sem demonstrá-la, é por meio do uso de *softwares* de geometria dinâmica, tais como o *Sketchpad*, o *Cabri Geomètré*, o *Mathematica* ou ainda o *GeoGebra*. Estes *softwares* servem para o convencimento sobre a validade de uma proposição e pode mostrar o

caminho a ser seguido para chegar à demonstração formal do que foi observado no software.

De Villiers usou em suas experiências o *software* de geometria dinâmica Sketchpad. Colocou os alunos para investigar com cuidado uma conjectura geométrica com o *software*, para que tivessem convicção da validade da mesma. Uma vez convictos, De Villiers passou a desafiá-los a tentar explicar o porquê da veracidade do resultado e os alunos passaram a ter curiosidade de saber porque o resultado é verdadeiro. Nesse momento a função da explicação está sendo usada na demonstração.

Outro aspecto que ele explorou também com os alunos foi a função descoberta da demonstração, seguida da função comunicação. A função verificação ficou reservada para as situações onde o aluno de alguma forma tinha dúvida quanto aos resultados encontrados. Alguns alunos podem não sentir a demonstração como desafio intelectual, mas será interessante que percebam que para outros alunos esse desafio existe. A função sistematização deve ser deixada para o momento em que o aluno já tem alguma experiência com demonstrações, devendo ser evitada num curso introdutório.

Enfim, De Villiers sugere uma ordem para que se explorem as funções da demonstração, que podem ser retomadas em espiral: explicação → descoberta → verificação → desafio intelectual → sistematização.

Nosso objetivo nesta oficina é realizar uma experiência com os participantes, inspirada nas de De Villiers, com o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, que foi escolhido por ser um *software* livre, que pode ser usado em qualquer instituição de ensino sem custo.

Apresentamos algumas situações geométricas que, exploradas dinamicamente, favorecem a elaboração de conjecturas que, posteriormente, precisam ser demonstradas. Tais situações, esperamos, poderão ser usadas em salas de aula de Matemática da Educação Básica, de modo que, a partir de observações feitas com o uso do software, os alunos sejam incentivados a elaborar conjecturas, que propiciem o desenvolvimento e a apropriação das várias funções da demonstração explicitadas neste texto.

## REFERÊNCIAS

DE VILLIERS, M. Papel e função da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Educação Matemática, nº 62. Março/Abril de 2001.

DE VILLIERS, M. Para a compreensão dos diferentes papéis da demonstração em Geometria Dinâmica. Atas do ProfMat (APM). 2002.