OFICINA 3

AS ABELHAS CONHECEM GEOMETRIA?

Deborah Martins Rafael
Élvia Mureb Sallun

Objetivo. Estudar o formato dos alvéolos das abelhas de mel desvendando o que as abelhas sabem e o que elas não sabem de geometria.

Introdução

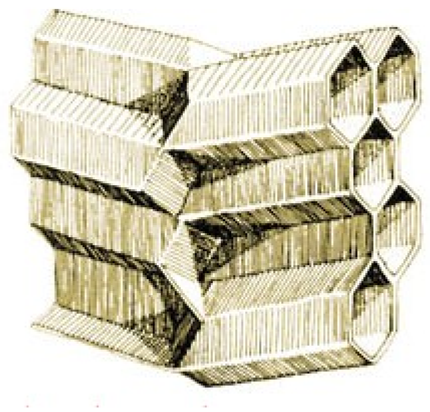
Há muito tempo as abelhas têm despertado o interesse dos homens. Existem relatos de Aristóteles (384 a.C – 322 a.C) e estudos matemáticos de Pappus de Alexandria (290 -350). D´Arcy Thompson cita Pappus em seu clássico livro "On Growth and Form" [4], um dos pioneiros a dar um tratamento matemático para fenômenos biológicos: "As abelhas foram dotadas de uma certa premeditação geométrica .... Havendo apenas três figuras que podem preencher o plano, ou seja, o triângulo, o quadrado e o hexágono, as abelhas sabiamente escolheram esse último devido a sua estrutura que contém maior número de ângulos, suspeitando do fato que ele podia segurar mais mel do que qualquer um dos outros dois". É importante frisar que o produzir cera para confeccionar alvéolos requer muito esforço para as abelhas. Logo, a ideia de economizar com esse trabalho parece bem natural. A comparação de Pappus foi interpretada nesse sentido.

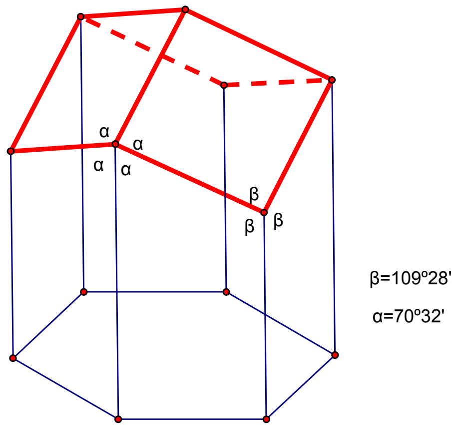
Generalizando a consideração de Pappus, surgiu a "conjectura do favo de mel": de todas as maneiras de dividir o plano em regiões de mesma área, o ladrilhamento hexagonal é aquele que minimiza o perímetro". Essa conjectura ficou em aberto até 1999, quando foi demonstrada por Thomas C. Hales.

Segundo D´Arcy Thompson, essa hipótese de os hexágonos aparecerem como sendo a escolha mais econômica foi refutada pela primeira vez por Erasmus Bartholin no século XVII. Seu argumento era que os hexágonos eram resultado da pressão resultante no conjunto quando cada abelha tentava fazer sua célula o maior possível.

É importante ter em mente que o alvéolo é tridimensional e não é um prisma hexagonal. Johannes Kepler, em 1619, descreveu o formato de um alvéolo: prisma reto hexagonal regular cujo fundo é uma união de 3 losangos iguais determinando um triedro que tem seus ângulos diedras iguais a 120º.

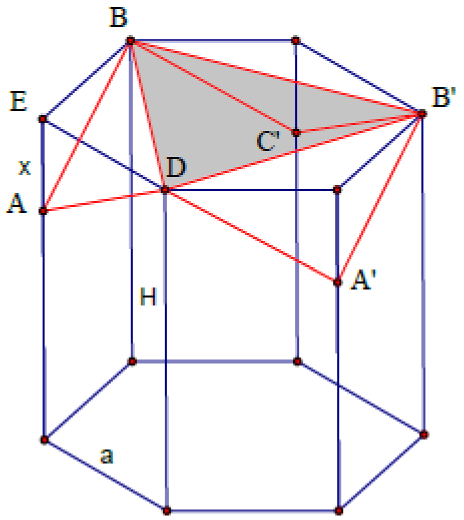
Essas células encaixam-se perfeitamente nos fundos formando a colmeia que é a união de 2 camadas desses alvéolos com aberturas hexagonais para entrada. Depois das células preenchidas com ovos, larvas, pólen, algumas dessas entradas são cobertas com cera para proteger o desenvolvimento das larvas ou o estoque de mel. Como indica a figura da esquerda, o formato do fundo permite que os alvéolos fiquem ligeiramente inclinados em relação ao plano horizontal, prevenindo que o mel escorra.

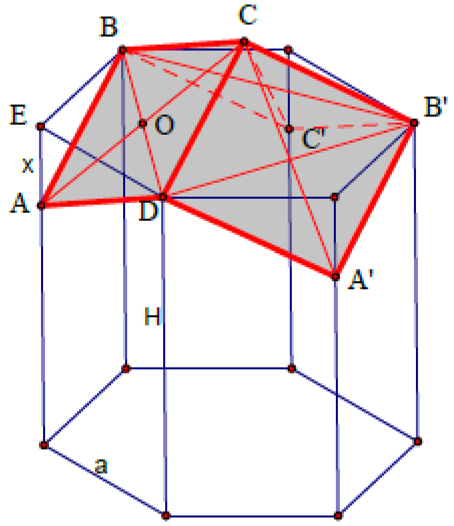




Um século depois de Kepler, o astrônomo e matemático Giácomo F. Maraldi (1665-1729) mediu **diretamente** os ângulos dos losangos que compõem o fundo da célula encontrando α = 70º32’ e β = 109º28’, conforme figura acima. Só como exercício de imaginação, é interessante pensar em sugestões de como medir, **diretamente**, ângulos em um alvéolo.

A geometria do alvéolo estava estabelecida. O biólogo e físico René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757) retomou o assunto da escolha mais econômica e se questionou: “Se as abelhas usam a forma hexagonal por economia de cera, elas devem usar o triedro com os 3 losangos no fundo também por economia”. Para comprovar suas hipóteses pediu ao matemático alemão Johan Samuel König (1712-1757) que determinasse qual, entre os prismas hexagonais com fundo composto por três losangos, era aquele com área de mínima. O volume de um prisma hexagonal não se modifica quando cortamos 3 cantos para colocar uma cúpula central formada por 3 losangos (veja a figura abaixo). Portanto, o trabalho de König era determinar o losango que resultaria na área (cúpula mais laterais) mínima.





Usando cálculo diferencial ele determinou os ângulos dos losangos que minimizam a área, mas cometeu um pequeno deslize obtendo quase o mesmo resultado obtido experimentalmente por Maraldi: 109º 26’ e 70º 34’. Seu trabalho foi praticamente pioneiro em otimização usando cálculo diferencial. O cálculo de König foi melhorado pelo matemático escocês Colin Mac-Laurin (1698-1746) que obteve aproximadamente 109º28’17” e seu suplemento. Uma consequência deste resultado é que o ângulo entre dois losangos é 120º e, portanto, todos os diedros do alvéolo medem 120º. Repare que os ângulos obtidos por König são ainda mais próximos dos resultados obtidos por Maraldi!

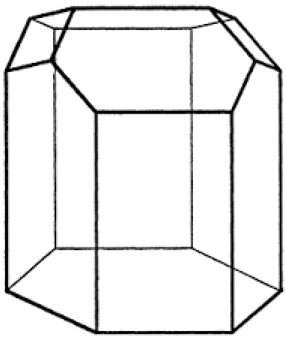
Lembramos que um ladrilhamento do espaço com prismas congruentes regulares só é possível com bases de n = 3, 4 ou 6 lados. Além disso, veremos nas atividades que entre todos os prismas retos regulares com bases de n = 3, 4 ou 6 lados de mesmo volume V e mesma altura H (logo com área da base S = V/H fixada) o hexagonal é o de menor área lateral.

Assim, ao fazer os alvéolos na forma de prisma hexagonal as abelhas *parecem fazer uma boa escolha* para o encaixe lateral perfeito e para economizar cera.

Escolhendo o alvéolo na forma de um prisma hexagonal reto regular com 3 cantos congruentes cortados de uma base e juntados convenientemente (no que resta dessa base) formando um triedro de 3 losangos congruentes *as abelhas também conseguem* que os alvéolos se encaixam perfeitamente nos fundos mantendo o mesmo volume do prisma e ainda garantem uma leve inclinação em relação ao solo de modo que a gravidade ajude a manter o conteúdo do alvéolo.

Essa incrível obra de engenharia que é a colmeia continua foco de especulação. Há quem continue a advogar a hipótese da economia, e de uma certa “sabedoria geométrica” das abelhas, mas também há argumentos muito convincentes em outra direção. Foram realizadas experiências interrompendo o trabalho das abelhas quando foi verificado que, num estágio intermediário, as células tinham um formato quase circular. A conjectura é a de que as abelhas começam fazendo alvéolos circulares que adquirem a forma hexagonal devido à compressão causada pelos muitos alvéolos construídos na cera quente. Experiências com bolhas de sabão e mesmo com cera confirmam que círculos acabam adquirindo uma formação hexagonal quando sob pressão. Veja [8] onde são citados vários trabalhos recentes e também [4] onde Thompson argumenta nesse sentido.

Voltando aos nossos problemas geométricos, veremos que, entre todas as possibilidades de cortar os 3 cantos congruentes do prisma reto hexagonal de volume V e altura H, a escolha dos losangos com um ângulo aproximadamente igual a 109º28'17" e, portanto, com os diedros de 120º, é a que mais economiza cera.



O que as abelhas *não sabem* é que esse modo de construir os fundos dos alvéolos não é exatamente o mais econômico. Em [2], o matemático húngaro Lázló Fejes Tóth (1915-2005) mostra que, para maior economia de cera, o formato do fundo deveria ser a metade de um certo octaedro irregular truncado e o fundo seria a união de 2 hexágonos e 2 losangos (veja a figura ao lado. Porém a diferença entre as áreas com os dois tipos de fundos é praticamente irrelevante e *a forma do alvéolo da abelha tem a vantagem de ser muito mais simples e de encaixar os fundos dos alvéolos criando a inclinação necessária em relação ao solo.*

Não pretendemos concluir nada definitivo sobre se a colmeia é o resultado do saber geométrico das abelhas ou das leis da física atuando cegamente. Não há dúvidas, porém, de que nós, humanos, não teríamos nada a contribuir para melhorar a essa fantástica solução de engenharia. Afinal, estamos há mais de 2 mil anos tentando entendê-la!

Atividades

Admitiremos que os ladrilhamentos do plano com polígonos regulares congruentes são possíveis somente se o número n de lados desses polígonos for n = 3, 4 ou 6 (ver [1], [6]). Logo, "ladrilhamentos" ou "preenchimentos" do espaço com prismas retos regulares congruentes são possíveis somente se esses prismas tiverem bases triangulares ou quadradas ou hexagonais.

Nas atividades seguintes, o leitor é convidado a ler as demonstrações e justificar as passagens.

Atividade 1 Entre todos os polígonos regulares com n = 3, 4 ou 6 lados e com área S fixada o de menor perímetro é o hexágono.

Justificativa

Seja L_n o lado do polígono regular de n lados de área $S_n = S$. Temos

$$S_3 = S = \frac{L_3^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad L_3 = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} \quad \Rightarrow \quad 2p = \frac{6\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$S_4 = S = L_4^2 \quad \Rightarrow \quad L_4 = \sqrt{S} \quad \Rightarrow \quad 2p = 4\sqrt{S}$$

$$S_6 = S = \frac{3L_6^2\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad L_6 = \frac{\sqrt{2S\sqrt{3}}}{3} \quad \Rightarrow \quad 2p = 2\sqrt{2S\sqrt{3}}.$$

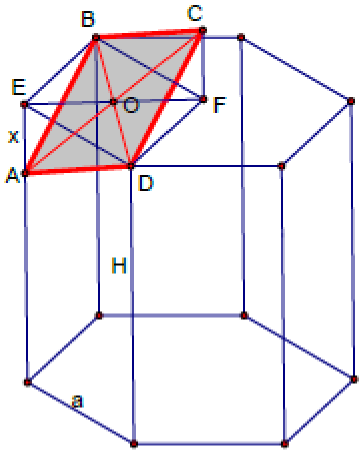
Como $\frac{6}{\sqrt[4]{3}} > 4 > 2\sqrt{2\sqrt{3}}$ segue que o de menor perímetro é o hexágono.

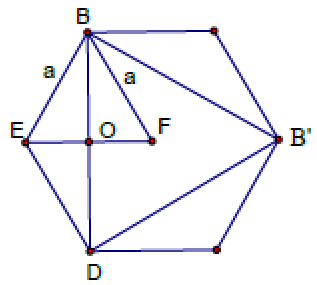
Atividade 2 Entre todos os prismas retos de base regular com n = 3, 4 ou 6 lados de volume V fixado e altura H fixada o de menor área lateral é o hexagonal.

Justificativa

Como V e H são fixados, segue que a área da base S é fixada. Por outro lado, a área lateral = perímetro da base x H, então, o de menor área lateral é aquele de menor perímetro.

Atividade 3 Seja um prisma reto hexagonal regular com altura H e volume V. Conforme figura abaixo, corte pela diagonal BD do hexágono um canto de "altura" x. Faça o mesmo para cada uma das outras 2 diagonais. Cole esses 3 cantos no triângulo equilátero que restou da base, formando um triedro com vértice C e 3 faces que são *losangos planos congruentes*. Entre todos os poliedros assim formados a partir de um prisma reto hexagonal regular com altura H e volume V, dependendo de x, o que tem menor área (sem contar a base hexagonal) é aquele em que x = $a\sqrt{2}/4$ (*a* é a medida do lado do hexágono). Nesse caso, um dos ângulos do losango é 109º 28' 17".





Justificativa

Basta seguir os itens abaixo.

a) O lado *a* do hexágono pode ser dado em termos de V e H.

b) O volume do alvéolo obtido é igual ao volume do prisma hexagonal original independentemente da altura x. Justifique.

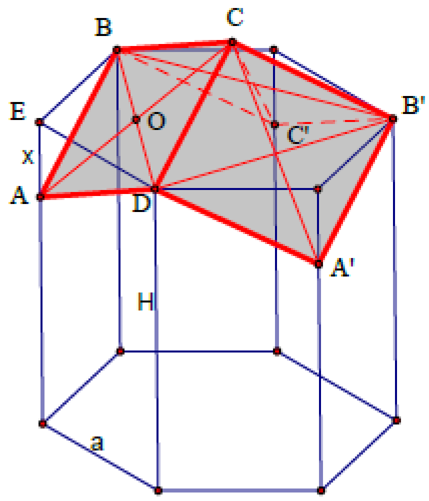
c) Cálculo da área a(x) do losango ABCD.

a(ABCD) = a(x) = AC.BD/2 = 2.AO.BO

$AO=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$ pois EO=$\frac{a}{2}$

$\angle BED=120^o \Rightarrow BO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$a(x)=a\sqrt{3}.\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$



d) A área do alvéolo (sem a base hexagonal) é dada por

$$A(x) = 3a\sqrt{3}.\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + 6(aH - \frac{ax}{2})$$

e) A determinação do ponto de mínimo da função A(x) para x ≥ 0 e seu gráfico.

Para x ≥ 0 temos

$$A'(x) = 3a\sqrt{3}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} - 3a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Logo $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ é o ponto de mínimo de A(x) em R^+

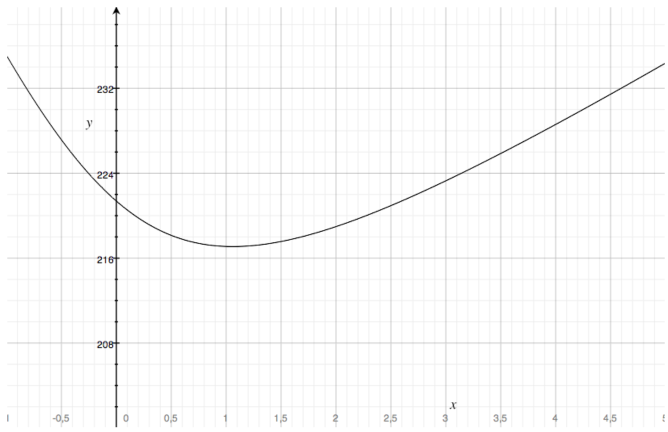


Gráfico de A(x) para H = 11 cm e a = 3 cm

f) Determinação dos ângulos do losango ABCD obtido quando $x = a\sqrt{2}/4$.

Substituindo o valor de x obtido em e) na expressão de AO de c) temos

$$AO = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

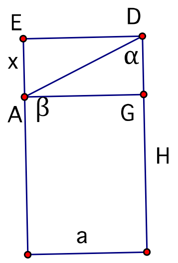
Como ΔAED tem ângulo reto em E,

$$AD = \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + a^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{8}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Aplicando a lei dos cossenos no ΔADC, temos cos ∠ADC = 1/3

Usando uma calculadora obtemos ∠ADC = 70,528779… ~ 70º 31’ 43” e, portanto, ∠BAD ~ 109º 28’ 17”.

Atividade 4 Os ângulos das faces do alvéolo da abelha indicados na primeira figura acima estão corretos.



Sugestão

Na figura ao lado vemos a face lateral com aresta AD e $\angle ADG = \alpha$.

Seja AG perpendicular às arestas laterais. Use os valores de x e AD obtidos em e) e f) para ver que $\cos \alpha = x/AD = 1/3$. Logo, $\angle$ ADG = $\angle$ ADC.

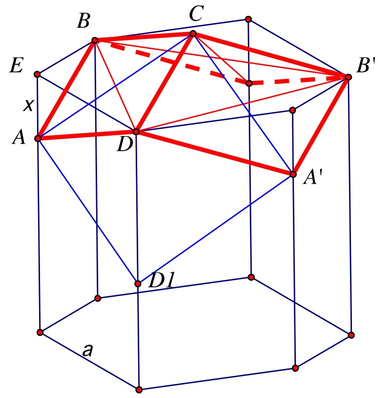
Atividade 5 (para casa) Mostrar que os diedros do alvéolo medem 120º seguindo as indicações abaixo ou ver [5].

Seja D_1 na aresta lateral do prisma de vértice D com $DD_1 = DA = 3a\sqrt{2}/4$. Mostre que

a) o ângulo diedral do alvéolo com aresta DD_1 mede 120º.

b) A, D_1, A', C são coplanares e formam um quadrado. Sugestão: mostrar que os vetores AD_1 e CA' são iguais e que $CA = A'D_1$.

c) Os 4 diedros que contêm D medem 120º.

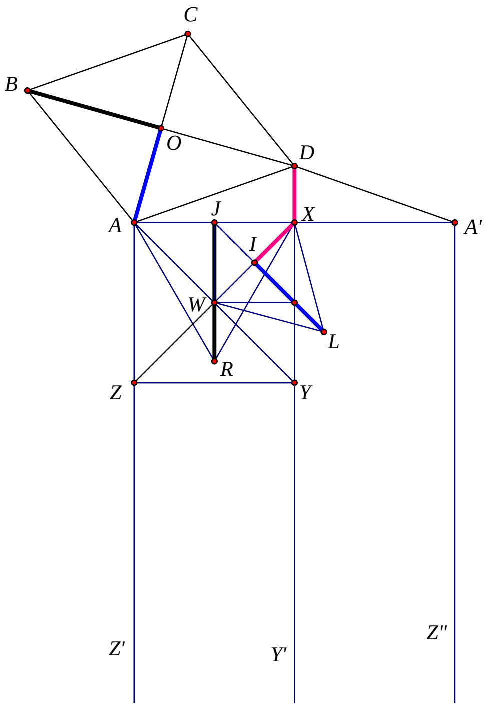


Esta imagem mostra a colmeia com alguns alvéolos já cheios e outros sendo trabalhados. É fácil reconhecer a rainha, cercada de operárias.

Atividade 6 Construção **com régua e compasso** de uma planificação de um alvéolo.

Conforme figura abaixo, inicie com os retângulos congruentes ZAXY'e Y'XA'Z"em que AX = XA'= a.

I) Determine os pontos R, L, J e D tais que



AR = XR = AX = a ,

RJ = $a\sqrt{3}/2$,

WL = LX = WX = $a\sqrt{2}/2$,

DX = XI = $a\sqrt{2}/4$ = ponto de mínimo de A(x).

b) Determine os pontos O, C e B tais que

AO = OC = LI = $a\sqrt{6}/4$ e

DO = BO = JR = $a\sqrt{3}/2$.

c) Reproduza 3 vezes o método para obter o alvéolo .

d) Justifique o método.

Procure desenhar a planificação com a ≈ 3,1 cm e AZ'≈ 11,2 cm que são as medidas reais aproximadas de um alvéolo de abelha de mel. Observamos que essas medidas podem variar dependendo do tipo de abelha de mel.

II) Recorte e monte pelo menos 3 células para observar o encaixe perfeito.

Referências Bibliográficas

1. ALVES, S. *Mosaicos no plano*, Revista do Professor de Matemática nº 40, São Paulo: SBM, 1999
2. SIEMENS, D.F., Jr, *The mathematics of the honeycomb*, The Mathematics Teacher, April 1965.
3. SORTAIS, R & SORTAIS, Y. *Géometrie de l'espace e du plan*, Hermann, Paris, 1988.
4. THOMPSON, D. W., *On Growth and Form,* Cambridge University Press, 1917.
5. TÓTH, F. L. *What the bees know and what they do not know*, Bulletin of the American Society, 70, July 1964, 468-481.
6. http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos.htm
7. http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/HComb_.htm
8. http://www.nature.com/news/how-honeycombs-can-build-themselves-1.13398