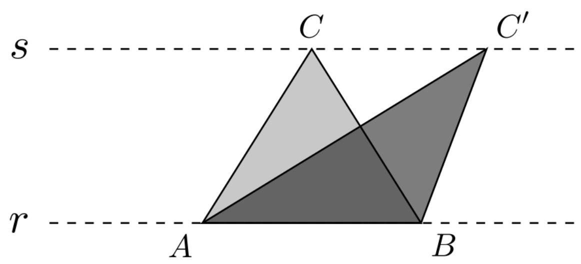
Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - *"João Afonso Pascarelli"*
IME-USP

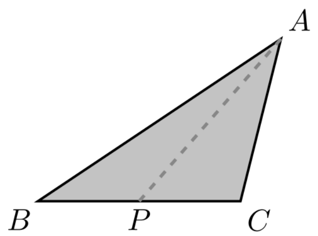
Teorema de Tales

OBJETIVO: Desenvolver habilidades relacionadas à visualização e geometria por meio do estudo da proporcionalidade de segmentos especiais.

DESENVOLVIMENTO: A área de todo triângulo com uma certa base *b* e uma altura *a* é *(b · a)/2*. Também sabemos que a distância entre duas retas paralelas é fixa. Assim, tem-se que, para *r* e *s* retas paralelas, quaisquer dois triângulos com uma mesma base sobre a reta *r* e um vértice sobre a reta *s* são *equivalentes*, isto é, possuem mesma área, porque têm a mesma base e a mesma altura. Na figura abaixo, os triângulos *ABC* e *ABC'* são equivalentes.



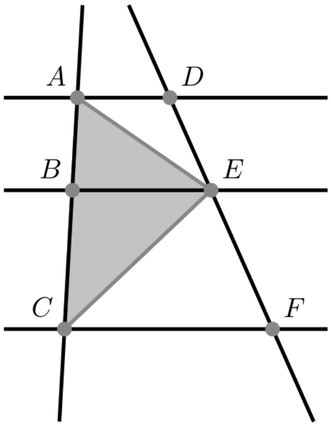
Agora veremos outra propriedade. Ao cortar um triângulo *ABC* por uma ceviana (um segmento que vai de um vértice até o lado oposto), ele será dividido em dois triângulos, *ABP* e *APC*, de bases *BP* e *PC* e, portanto, áreas *(BP · a)/2* e *(PC · a)/2*. Logo, a razão entre as áreas é igual à razão entre as bases.



$$\frac{\acute{A}rea(ABP)}{\acute{A}rea(APC)} = \frac{(BP \cdot a)/2}{(PC \cdot a)/2} = \frac{BP}{PC}$$

Agora vamos considerar 3 retas paralelas e 2 retas transversais, determinando os pontos de interseção *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Traçamos o triângulo *ACE*. Conseguimos observar que o segmento *BE* é uma ceviana dele, então, pela propriedade anterior, a razão entre as áreas dos triângulos *ABE* e *BCE* é igual à razão entre as suas bases, *AB* e *BC*.

Analogamente, conclui-se que a razão entre as áreas dos triângulos *BDE* e *BEF* é igual à razão entre as suas bases, *DE* e *EF*.



$$\frac{\acute{A}rea(ABE)}{\acute{A}rea(BCE)} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\acute{A}rea(BDE)}{\acute{A}rea(BEF)} = \frac{DE}{EF}$$

Assim, pela propriedade dos triângulos nas paralelas, os triângulos de cima, *ABE* e *BDE*, têm áreas iguais; e os triângulos de baixo, *BCE* e *BEF*, também. Então as duas razões entre as áreas são iguais. Mas sabemos que cada uma delas é igual à razão entre as bases de cada triângulo.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\acute{A}rea(ABE)}{\acute{A}rea(BCE)} = \frac{\acute{A}rea(BDE)}{\acute{A}rea(BEF)} = \frac{DE}{EF}$$

Logo, as razões *AB/BC* e *DE/EF* são iguais.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Esse é o *Teorema de Tales*.

Essa demonstração apresentada vale para o caso em que a possível interseção entre as retas transversais aconteça em qualquer ponto que não esteja sobre a reta paralela do meio (que contém BE). Mas e se a interseção estiver ali? Como provar o teorema?