

Números Figurados

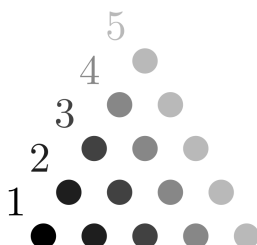
OBJETIVO: Desenvolver habilidades relacionadas à Teoria dos Números e a visualização por meio da apresentação dos números figurados, o que suscita o pensamento algébrico e geométrico.

DESENVOLVIMENTO:

Cada unidade será representada por uma bolinha.

Números triangulares

Começando com 1 bolinha e adicionando uma sequência de bolinhas que seguem os números naturais (ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots$) de modo a formar uma figura geométrica, essa figura é, em cada etapa, um triângulo.

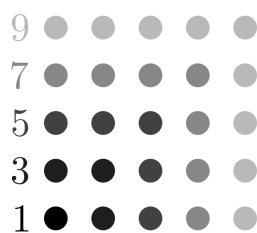


Por isso, a quantidade de bolinhas em cada etapa é chamada de “número triangular”. A sequência dos números triangulares é:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

Números quadrados

Agora fazemos diferente: começamos com 1 bolinha, depois adicionamos 3, 5, 7, ..., ou seja, olhamos para a sequência dos números naturais (1, 2, 3, ...), adicionamos o 1, pulamos o 2 e adicionamos o 3, pulamos o 4 e adicionamos o 5... (o que nos dá a sequência dos números ímpares).

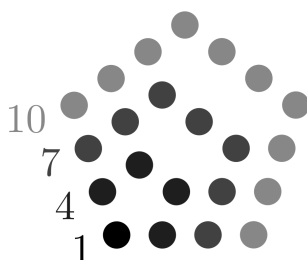


A figura formada pelas bolinhas é, em cada etapa, um quadrado. Por isso, a quantidade de bolinhas em cada etapa é um “número quadrado”. A sequência dos números quadrados é:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

Números pentagonais

Agora começamos com o número 1 (1 bolinha), pulamos os próximos dois números e adicionamos o 4, pulamos os próximos dois e adicionamos o 7, pulamos os próximos dois e adicionamos o 10...



Aqui a figura formada é um pentágono. A sequência dos “números pentagonais” são:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ...

Números hexagonais, heptagonais, octogonais...

Podemos continuar com esse padrão: ao aumentar em 1 o espaçamento entre os números de bolinhas adicionados em cada etapa, a figura geométrica formada tem 1 lado a mais.

Assim, com um espaçamento de três números, temos os números hexagonais; de quatro números, formamos os heptagonais; depois os octogonais; etc.

Todos esses *números* (triangulares, quadrados, pentagonais, ...) que podem formar *figuras* são chamados de “números figurados”.

Somas de P.A.s

É possível encontrar uma fórmula para determinar os termos de cada sequência dos números figurados a partir dos conhecimentos de progressões aritméticas (P.A.'s).

O n -ésimo termo (a_n) de uma P.A. de termo inicial a_1 e razão r é dado por:¹

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad (\text{I})$$

A soma dos n primeiros termos de uma P.A. de termo inicial a_1 e n -ésimo termo a_n é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (\text{II})$$

Nos números triangulares ($T_1, T_2, T_3, \dots$), que são as somas dos n primeiros termos dos números naturais (1, 2, 3, ...), temos $a_1 = 1$ e $a_n = n$. Então, a sequência (T_n) é dada por:

$$T_n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2} = \frac{n + n^2}{2}$$

De forma similar, encontramos fórmulas para as sequências dos números quadrados (Q_n), pentagonais (P_n), hexagonais (H_n) etc:

O termo inicial de todas é igual: $a_1 = 1$. Sabendo disso e juntando as equações (I) e (II), obtemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + 1 + (n - 1) \cdot r) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 + (n - 1) \cdot r) \cdot n}{2}$$

¹ As demonstrações, que não apresentamos aqui, podem ser encontrada em: [Progressão aritmética – Wikipédia, a enciclopédia livre](#)

$$S_n = \frac{2n + n(n-1) \cdot r}{2}$$

$$S_n = n + \frac{n(n-1) \cdot r}{2}$$

Agora basta variar o valor de r , que é o espaçamento entre os números somados em cada caso.

Os números pentagonais (P_n) são as somas dos números ímpares (1, 3, 5, ...), que são uma P.A. de razão $r = 2$. Substituindo na fórmula encontrada acima, temos:

$$P_n = n + \frac{n(n-1) \cdot 2}{2}$$

$$P_n = n + n(n-1)$$

$$P_n = n + n^2 - n$$

$$P_n = n^2$$

Perceba que essa soma (a soma dos números ímpares consecutivos) forma a sequência dos números quadrados.

Com esse mesmo processo determina-se o termo geral das sequências dos números hexagonais ($r = 3$), heptagonais ($r = 4$), octogonais ($r = 5$) etc.