COLORAÇÕES RESTRITAS DE GRAFOS

Gordana Manić

MAC 5701

Tópicos em Ciência da Computação

Plano de Estudos

Orientador: **Paulo Feofiloff**

— São Paulo — 20 de abril de 2001—

Resumo

Trataremos de coloração restrita (list-coloring) de grafos, que é uma generalização do problema clássico de coloração de vértices. A generalização é obtida impondo-se restrições ao conjunto de cores disponíveis para cada vértice. Serão estudadas algumas técnicas de coloração restrita que combinam métodos combinatórios, algébricos e probabilisticos.

Inicialmente, exporemos resultados básicos e algumas aplicações da teoria estudada seguindo [10], [15], [4] e [18] e enunciaremos alguns resultados envolvendo as relações entre coloração clássica e coloração restrita segundo [1], [9] e [10]. A seguir trataremos de coloração restrita em grafos planares, apresentando resultados que utilizam métodos combinatórios citados em [12], [20] e [21]. Prosseguindo, descreveremos uma abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi em [2] e apresentaremos algumas de suas aplicações incluindo um resultado assintótico na tentativa da resolução da conhecida conjectura da coloração restrita de arestas [13]. Damos uma prova da conjectura da coloração restrita de arestas para grafos completos de ordem ímpar, segundo [13], e para grafos bipartidos, de acordo com [19].

Palavras-Chave: Coloração de grafos, coloração restrita, list coloring, número cromático, número cromático restrito.

Introdução

O problema clássico de coloração de vértices em grafos se resume em encontrar uma função que associa a cada vértice do grafo uma cor, de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Neste trabalho estudamos uma generalização deste problema que consiste em encontrar uma coloração de vértices em que a cor de cada vértice v pertence a um conjunto pré-especificado $L(v)$ de cores "permitidas". Ou seja, dado um grafo $G = (V_G, E_G)$ e um subconjunto $L(v)$ de $\mathbb{N}$ para cada vértice v, encontrar uma coloração c de vértices de G tal que $c(v) \in L(v)$ para cada $v \in V_G$.

O conceito de coloração restrita foi introduzido na segunda metade da década de 70 independentemente por Erdős, Rubin e Taylor [10] e Vizing [22]. Vizing iniciou seus estudos nesta área com a intenção de estudar coloração total em grafos, ou seja, encontrar o número mínimo de cores para colorir todos os vértices e arestas de modo que os elementos adjacentes ou incidentes recebam cores distintas. Erdős, Rubin e Taylor, por outro lado, tiveram como motivação o problema de Dinitz: *dada uma matriz $M_{n\times n}$ tal que cada elemento é um conjunto com n elementos é sempre possivel escolher um elemento de cada conjunto, de modo que os elementos escolhidos são distintos em cada linha e cada coluna.* Ainda, em [10] foi dada uma caracterização para grafos com número cromático restrito a no máximo 2, uma estimativa para o número cromático restrito para grafos bipartidos aleatórios, uma prova do teorema de Brooks [9, p. 99] para coloração restrita e o enunciado de diversas conjecturas, algumas ainda em aberto.

Apesar do assunto, em seu início, oferecer um número grande de problemas desafiadores a área de coloração restrita começou a florescer somente na década passada, com a resolução da maioria das conjecturas enunciadas em [10], e vem crescendo desde então com o surgimento de novas questões, novas abordagens como, por exemplo, o uso de métodos algébricos e algumas aplicações em problemas de escalonamento e área de atribuição de freqüências entre outras.

No restante da apresentação fornecemos a notação e detalhamos, os métodos combinatórios, algébricos e probabilisticos utilizados para o estudo de coloração restrita. A próxima seção contém terminologia básica envolvendo grafos. Na seção 2 apresentamos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, enunciamos resultados básicos envolvendo esta teoria e exporemos de modo breve algumas suas aplicações segundo [10], [4] e [18]. A seguir tratamos, de modo breve, da complexidade computacional de teoria estudada. Na seção seguinte enunciamos alguns resultados envolvendo as relações entre coloração clássica e coloração restrita conforme [1], [9] e [10]. A seguir tratamos de coloração restrita em grafos planares de acordo com [12], [20] e [21]. Na seção 6 descrevemos a abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi em [2] e damos uma aplicação desse método. Na seção seguinte tratamos da conhecida conjectura da coloração restrita de arestas expondo uma prova para grafos bipartidos de acordo com [19]. Fazemos o uso combinado dos métodos probabilistico e algébrico para provar a conjectura citada para grafos completos de ordem ímpar e para provar uma versão enfraquecida desta mesma conjectura seguindo [13]. Finalmente, na última seção damos uma proposta para o projeto de dissertação de mestrado.

1 Terminologia básica

Apresentamos a notação e alguns conceitos básicos sobre grafos.

Um *grafo* é um par ordenado (V_G, E_G) de conjuntos finitos, com E_G um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V_G. Os elementos de V_G são chamados *vértices*, e os elementos de E_G de *arestas*. Por brevidade, denotamos arestas $\{u, v\}$ por uv ou vu. Se $\alpha = uv$, dizemos que α *incide em* u e em v e que u e v são *extremos* de α. Também dizemos que u e v são *vizinhos* ou *adjacentes* e que u e v são *ligados* por α. Duas arestas distintas são ditas *adjacentes* se eles têm um extremo em comum.

A *ordem* de um grafo G, denotado por $|G|$, é o número de seus vértices. O *tamanho* de G é o número de suas arestas e será denotado por $\|G\|$.

O *grau* de um vértice v de um grafo G é o número de arestas incidentes em v e será denotado por $d_G(v)$. O *grau mínimo* de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{d_G(v) : v \in V_G\}$ e o *grau máximo* é o número $\Delta(G) := \max\{d_G(v) : v \in V_G\}$. O *grau médio* é o número $d(G) := \frac{1}{|G|} \sum_{v \in V_G} d_G(v)$.

Se U é um subconjunto de V_G, denotamos por $\Gamma_G(U)$ o conjunto dos vértices de $V_G \setminus U$ adjacentes a pelo menos um vértice de U.

Se todos os vértices de um grafo G com n vértices são dois a dois adjacentes dizemos que G é *completo* e o denotamos por K_n; K_3 é chamado *triângulo*.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$, escrevemos $H \subseteq G$. Um subgrafo completo de um grafo é chamado de *clique*.

A *união* de dois grafos G e H, denotada por $G \cup H$, é o grafo $(V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$. Se $U \subseteq V_G$, denotamos por $G[U]$ o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é U e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que têm ambos os extremos em U. Ainda, denotamos por $G - U$ o grafo $G[V_G \setminus U]$; para o caso em que $U = \{v\}$, abreviamos $G - \{v\}$ por $G - v$.

Um grafo é *bipartido* se V_G admite uma partição em duas classes de modo que cada aresta tem extremos em classes distintas; uma tal partição é chamada *bipartição* do grafo. Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido no qual todo par de vértices de classes distintas é uma aresta. Denotamos por $K_{m,n}$ o grafo completo com bipartição (V_1, V_2) tal que $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$.

O *grafo-linha* (*line-graph*) de um grafo G, denotado por $L(G)$, é o grafo com $V_{L(G)} := E_G$ e $\alpha_1\alpha_2 \in E_{L(G)}$ se e só se α_1 e α_2 são arestas adjacentes em G.

Um *caminho* é um grafo P com $V_P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ não-vazio e os $v_i\,'s$ todos distintos e $E_P = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$. Por comodidade, podemos representar um tal caminho por $v_1v_2 \ldots v_k$. Os vértices v_1 e v_k são os *extremos* do caminho. Se $P = v_1v_2 \ldots v_k$ é um caminho com $k \geq 3$, então $(V_P, E_P \cup \{v_kv_1\})$ é chamado de *circuito*. Um tal circuito pode ser representado por $C = v_1v_2 \ldots v_kv_1$. O *comprimento* de um caminho é o número de suas arestas; analogamente definimos o comprimento de um circuito. Dois caminhos são ditos *internamente disjuntos* se não possuem vértices em comum, exceto os seus extremos.

Um grafo é *conexo* se para todo par de vértices distintos u e v contém um caminho com extremos u e v. Um grafo que não contém nenhum circuito é chamado de *acíclico*. Um grafo acíclico e conexo é chamado de *árvore*.

Um conjunto de vértices ou arestas dois a dois não adjacentes é chamado *independente*. Um conjunto independente de arestas de um grafo é chamado de *emparelhamento* (*matching*).

Quando G estiver subentendido, omitimos o índice $_G$. Por exemplo, em vez de V_G e E_G escrevemos simplesmente V e E.

2 Coloração restrita: conceitos e resultados básicos

Nessa seção damos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, enunciamos resultados básicos envolvendo esta teoria e exporemos de modo breve algumas suas aplicações.

2.1 Coloração restrita

Uma *cor* é um elemento de $\mathbb{N}$. Uma *lista de cores* é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as listas de cores.

Dado um grafo G e uma atribuição $L : V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores aos vértices de G, uma *coloração restrita que respeita L* ou *L-coloração* (*list-coloring*) de G é uma função $c : V(G) \to \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ e $c(v) \neq c(u)$ se u e v são adjacentes. O conjunto $L(v)$ é chamado de *lista de cores permitidas de v*.

O fato seguinte mostra que quando para cada vértice v de um grafo G a lista de cores permitidas $L(v)$ é suficiente grande, G admite uma L-coloração.

Fato 2.1
Se G é um grafo e L uma atribuição de listas de cores aos vértices de G com $|L(v)| \geq d(v) + 1$ para todo $v \in V$, então G admite uma L-coloração.

Dados o grafo G e atribuição L como nas condições do fato acima, o seguinte algoritmo guloso define uma L-coloração de G: para qualquer ordenação $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dos vértices de G, colorimos cada vértice v_i com uma cor $c(v_i)$ de $L(v_i)$ tal que $c(v_i) \notin \{c(v_j) : j < i \text{ e } v_i v_j \in E_G\}$.

Em seguida, mostramos que o problema de coloração restrita em grafos completos corresponde ao problema de emparelhamento em grafos bipartidos.

Seja $G := K_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e L uma atribuição de listas de cores aos vértices G. Definimos o grafo K com bipartição (A, B) com $A := V_G$, $B := \bigcup_{v \in V_G} L(v)$ e $vc \in E_K$ se e só se $c \in L(v)$. É claro que, G admite uma L-coloração se e somente se K possui um emparelhamento que cobre A. Portanto, L-coloração se reduz nesse caso, a uma aplicação do teorema de Hall [9, p. 31].

Vimos, então, que nesse caso a existencia de L-coloração de G depende de conteudo de listas de cores permitidas de vértices.

2.2 Aplicações

Vamos expor duas aplicações de coloração restrita: a primeira em problemas de escalonamento e a segunda em problemas de atribuição de freqüências.

Um exemplo particular do problema de escalonamento pode ser obtido aplicando-se uma restrição ao problema citado em [4], encontrado na companhia aérea Húngara. A situação dada assemelha-se à seguinte: a companhia possui aviões de diversos tipos e trabalha com diferentes vôos. Cada vôo tem seu horário fixado de acordo com a temporada. A restrição é a de que cada vôo só pode ser realizado por certos tipos de aviões, esta restrição não consta em [4]. O problema é atribuir a cada vôo, numa temporada, um avião dentre os tipos que possam realizá-la.

A representação em grafos do problema acima e o respectivo uso de coloração restrita se dá do seguinte modo: definimos $G = (V, E)$ tal que $V := \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ sendo J_i os vôos e $J_i J_k \in E$ se e só se os horários correspodentes não são disjuntos. Cada cor corresponde a um avião. Cada vértice J_i, $1 \leq i \leq n$, tem uma lista $L(J_i)$ de cores permitidas. O problema de escalonamento, então, corresponde ao problema de encontrar uma L-coloração do grafo G.

Outra aplicação pode ser encontrada na atribuição de freqüências de transmissão de rádio e televisão (frequency assigment problem). A situação dada em [18] assemelha-se à seguinte: suponha dado n transmissores numa região e que cada transmissor seja capaz de operar somente em determinadas freqüências. Certos pares de transmissores correm o risco de interferência e por isso devem escolher freqüências diferentes.

A formulação em grafos desse problema pode ser dada por: considere $G = (V, E)$ com V o conjunto de transmissores $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ e $t_i t_j \in E$ se e só se t_i e t_j correm o risco de interferir. O problema é, dadas as listas $L(t_i)$, $1 \leq i \leq n$, de freqüências permitidas, encontrar uma L-coloração de G.

Chamamamos a atenção para o fato de que nos ambos exemplos acima as situações encontrados na prática são mais complicadas.

2.3 k-coloração restrita

Dado um número inteiro positivo k, G *admite uma k-coloração restrita* (*is k-choosable*) se G possui uma L-coloração para toda atribuição L com $|L(v)| \geq k$ para todo $v \in V$. O *número cromático restrito* (*choice number*) de G, denotado por $\mathrm{ch}(G)$, é o menor k tal que G admite uma k-coloração restrita.

Um grafo G é *k-colorível* se G admite uma L-coloração com $L(v) := \{1, 2, \ldots, k\}$ para todo vértice v de G. O *número crómatico* de G, $\chi(G)$, é o menor k tal que G é k-colorível.

Segue da definição que

$$\textit{Para todo grafo } G,\ \mathrm{ch}(G) \geq \chi(G).$$

Ainda, como conseqüência do fato 2.1 temos que

$$\textit{Para todo grafo } G,\ \mathrm{ch}(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A estimação de $\mathrm{ch}(G)$ dada em termos de $\Delta(G)$ é justa, pois se G é grafo completo ou um circuito de comprimento ímpar, teremos $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G) = \Delta(G)+1$ e portanto $\mathrm{ch}(G) = \Delta(G)+1$. Ainda, em [10] encontramos a demonstração da seguinte generalização do conhecido teorema de Brooks [9, p. 99]: *se G é um grafo conexo, que não é completo e nem é circuito de comprimento ímpar, então* $\mathrm{ch}(G) \leq \Delta(G)$.

Em seguida damos uma caracterização de grafos com número cromático restrito a no máximo 2.

Teorema 2.2 ([10])
Um grafo conexo G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 2$ se e só se o centro de G é ou um vértice ou

um circuito de comprimento par ou um grafo que consiste de dois vértices e três caminhos internamente disjuntos entre eles, onde comprimento de pelo menos dois destas caminhos é dois.

Chamamos de *centro* de um grafo G o grafo obtido removendo-se os vértices de grau um, recursivamente, até não existirem mais vértices de grau um.

3 Complexidade computacional

De modo breve, discutimos a complexidade algorítmica dos seguintes problemas envolvendo coloração restrita.

- Problema 1: *Dado um grafo G e uma atribuição L de listas de tamanho k aos vértices de G, decidir se G admite uma L-coloração.*
- Problema 2: *Dado um grafo Ge um número inteiro positivo k, decidir se* $\mathrm{ch}(G) \leq k$.

O problema de decidir se para um dado grafo G e um número inteiro positivo $k \leq |G|$, $\chi(G) \leq k$ é NP-completo. Portanto o problema 1 também é NP-completo.

Cabe ressaltar que existem classes de grafos cujo problema de decidir a k-coloração são computáveis em tempo polinomial, porém o problema 1, para a mesma classe de grafos, permanece NP-completo, por exemplo, a classe dos grafos bipartidos completos, conforme [14].

Por outro lado, o problema 2 é mais complexo pois ele nem está em NP, embora esteja Π_2^p-completo ([10]).

4 Relações entre coloração clássica e coloração restrita

Nessa seção fazemos algumas comparações entre o número cromático e número cromático restrito.

Vimos na subseção 2.1 que todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$.

Definimos o *número de coloração* (*coloring number*) de G, $\mathrm{col}(G)$, como sendo o menor número natural k tal que todo subgrafo de G contém um vértice de grau no máximo $k-1$. Todo grafo G satisfaz $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G)$ [9, p. 98]. O teorema seguinte mostra que número de coloração é limitante superior também para o número cromático restrito.

Teorema 4.1 ([9])
$\mathrm{ch}(G) \leq \mathrm{col}(G)$, *para todo grafo G.*

A demonstração deste teorema será por indução na ordem de G. No passo de indução, supomos que G é um grafo com $|G| > 1$ e L uma atribuição de listas com pelo menos $k := \mathrm{col}(G)$ cores aos vértices de G. O grafo G contém um vértice v de grau no máximo $k-1$. Então v possui mais cores, em sua sua lista, que vizinhos. Portanto, G é L-colorível se e só se $G - v$ é L-colorível. Pelo hipótese de indução, $\mathrm{ch}(G - v) \leq \mathrm{col}(G - v) \leq k$, ou seja, $G - v$ é L-colorível. Logo, G é L-colorível o que implica a afirmação do teorema.

O fato seguinte mostra que existem grafos tais que a diferença entre o número cromático e o número cromático restrito é arbitrariamente grande. Portanto, não existe limitação para o número cromático restrito em termos do número cromático.

Fato 4.2 ([10])
Seja k um número natural, $k \geq 2$, e $m := \binom{2k-1}{k}$, então $\chi(K_{m,m}) = 2$ e $\mathrm{ch}(K_{m,m}) > k$.

Existem grafos com número cromático 2 e com grau médio arbitrariamente grande, por exemplo, os grafos bipartidos completos. Em contraste, o teorema a seguir nos mostra que o número cromático restrito limita o grau médio. Logo vemos que o número cromático difere fundamentalmente do número cromático restrito.

Teorema 4.3 ([1])
Se G é um grafo , k um número natural e $d(G) > 4\binom{k^4}{k}\log(2\binom{k^4}{k})$, então $\mathrm{ch}(G) > k$.

A prova do teorema segue o seguinte esquema: mostramos que G contém um subgrafo bipartido H com $\delta(H) \geq \frac{d(G)}{4}$. Definimos o conjunto de cores $S := \{1, 2, \ldots, k^4\}$ e usando métodos probabilisticos provamos que existem subconjuntos $L(v) \subset S$ com $|L(v)| = k$ para todo $v \in V_H$, tais que H não admite uma L-coloração. Isto implica em $\mathrm{ch}(G) \geq \mathrm{ch}(H) > k$.

O teorema abaixo nos fornece um fato interessante sobre o número cromático restrito de grafos aleatórios. Para as noções básicas de probabilidade e grafos aleatórios seguimos [8] e [9, cap. 11], respectivamente.

$\mathcal{G}(n,p)$ denota um espaço finito de probabilidade cujos elementos são grafos de n vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, e onde todo par de vértices é ligado por uma aresta com a probabilidade p. Chamamos um grafo $G \in \mathcal{G}(n,p)$ de *grafo aleatório com aresta-probabilidade p*. Se A é uma propriedade de grafos, dizemos que *quase todo G de $\mathcal{G}(n,p)$ tem propriedade A* se a probabilidade de que G satisfaz A tende a 1 quando n tende a infinito, para $G \in \mathcal{G}(n,p)$.

Teorema 4.4 ([1])
Quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ satisfaz $\mathrm{ch}(G) = (1 + o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$.

Chamamos atenção para o fato de que a prova do teorema 4.4 é extensível a qualquer constante p de aresta-probabilidade.

Em [5] Bollobás mostrou que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ satisfaz $\chi(G) = (1 + o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$. Portanto, pelo teorema anterior temos que o número cromático e o número cromático restrito têm o mesmo comportamento assintótico em $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$; isto é um tanto quanto surpreendente em vista do fato 4.2 e do teorema 4.3.

A prova de teorema anterior segue o seguinte esquema: o resultado de Bollobás citado acima implica que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ satisfaz $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G) = (1 + o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$. E para mostrar que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq (1+o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$ definimos o número $q := (1 + o(1))2\log_2 n$ e atribuimos a cada vértice v de um grafo $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ uma lista de cores tal que $|L(v)| \geq \frac{n}{q} + \frac{n}{\log^2 n} = (1 + o(1))\frac{n}{2\log_2 n}$. Damos um algoritmo que tem como entrada o grafo G e as listas $L(v)$. O algoritmo colore alguns vértices de G respeitando as listas $L(v)$ dadas e retorna um subgrafo G' de G tal que seus vértices são exatamente aqueles que não receberam nenhuma cor. Ainda, as cores atribuidas pelo algoritmo são omitidas de listas de cores dos vértices de G'. O "loop" do algoritmo é baseado no seguinte resultado devido a Bollobás [5]: *quase todo grafo* $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ *satisfaz a propriedade de que todo conjunto de pelo menos* $\frac{n}{\log^2 n}$ *vértices de* G *contém um conjunto independente de* q *vértices.* Finalmente, mostramos que o teorema de Hall [9, p. 31] implica que a todo vértice de G' podemos atribuir uma cor de sua lista de modo que cores atribuidas são dois a dois distintas.

5 Coloração restrita de grafos planares

Nesta seção tratamos de duas conjecturas propostas por Erdős, Rubin e Taylor [10] envolvendo número cromático restrito de grafos planares e outros resultados correlatos [12] e [21].

Para não nos prolongarmos demasiadamente utilizamos as definições em [9, cap. 4] referentes a grafos planares. Dizemos que G é um grafo *planar* se G pode ser desenhado no plano de modo que não existam duas arestas em G que se intersectem exceto num extremo em comum.

Chamamos a atenção para o fato de que os grafos planares que consideramos não admitem arestas múltiplas por definição. Ainda, lembramos que todo grafo planar G satisfaz $\chi(G) \leq 4$.

Todo grafo planar contém um vértice de grau no máximo 5 e portanto o teorema 4.1 implica em $\mathrm{ch}(G) \leq 6$ para todo grafo planar G.

O seguinte teorema é uma solução para uma das conjecturas propostas por Erdős, Rubin e Taylor [10].

Teorema 5.1 (Thomassen [20])
Todo grafo planar G *satisfaz* $\mathrm{ch}(G) \leq 5$.

O truque da prova é encontrar uma extensão apropriada. A afirmação do teorema segue do seguinte fato:

Lema 5.2
Seja G *um grafo plano tal que toda face interna de* G *é limitada por um triângulo e a face externa por um circuito* $C := v_1v_2 \ldots v_kv_1$. *Suponha que* v_1 *e* v_2 *são coloridos com* 1 *e* 2, *respectivamente, e que* $L(v)$ *é uma lista de pelo menos três cores se* $v \in V_C \setminus \{v_1, v_2\}$ *e de pelo menos cinco cores se* $v \in V_G \setminus V_C$. *Então, a coloração de* v_1 *e* v_2 *pode ser estendida à uma coloração restrita de* G *respeitando as listas* $L(v)$ *dadas.*

A prova de 5.2 é por indução em $|G|$ e ela não utiliza troca de cores ao longo de um caminho nem a fórmula de Euler, que são os instrumentos utilizados na prova clássica do *teorema de cinco cores* [9, p. 96]. Uma vez que 5.1 implica no teorema de cinco cores pode-se dar uma demonstração mais simples, do que a versão clássica, deste teorema.

Um grafo G é planar se e só se não contém *minor* K_5 e nem *minor* $K_{3,3}$ [9, p. 84]. Para a definição de *minor* ver [9, p. 16].

Em [25], Škrekovski extendeu o resultado de Thomassen provando que todo grafo G sem minor K_5 satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 5$.

A conjectura de que existem grafos planares com o número cromático restrito maior que 4 é devido aos autores de [10]. Margit Voigt foi a primeira a provar esta conjectura em [23] exibindo um tal grafo com 238 vértices. Demonstramos o seguinte teorema, devido a Gutner, que usa uma construção mais simples.

Teorema 5.3 (Gutner [12])
Existe um grafo planar G de ordem 75 *com* $\mathrm{ch}(G) > 4$.

Mostramos que a teorema 4.1 implica que *todo grafo planar G sem triângulos satisfaz* $\mathrm{ch}(G) \leq 4$. Novamente, Margit Voigt [24] foi a primeira a dar uma solução para o problema de Kratochvíl e Tuza mostrando que nem todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$, ela exibiu um grafo planar sem triângulos com 166 vértices e número cromático restrito estritamente maior que 3. Provamos o seguinte teorema, devido a Gutner, que usa uma construção mais simples.

Teorema 5.4 (Gutner [12])
Existe um grafo planar sem triângulos G de ordem 164 *com* $\mathrm{ch}(G) > 3$.

Na prova do teorema a seguir, Thomassen estende o método usado na prova de 5.1. A *cintura* de um grafo G, $g(G)$, é o comprimento do menor circuito em G.

Teorema 5.5 ([21])
Todo grafo planar G com $g(G) \geq 5$ satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$.

Um último fato sobre grafos planares, cujo esboço da prova apresentamos na seção seguinte, é o de que *todo grafo planar G bipartido satisfaz* $\mathrm{ch}(G) \leq 3$ que é conseqüência do teorema 6.1.

6 Coloração restrita e orientações de grafos

Usando técnicas algébricas, Alon e Tarsi [2] obtiveram uma relação interessante entre coloração e orientações de grafos, que em vários casos fornece informações úteis sobre o número cromático restrito. A seguir damos algumas definições, o esboço da prova do resultado de Alon e Tarsi e uma aplicação deste resultado.

Um *grafo orientado* D é um par ordenado de conjuntos finitos (V_D, E_D), com E_D um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V_D. Os elementos de E_D são chamados *arcos*. Se $\alpha = (u, v)$ é um arco de um grafo orientado, dizemos que α tem *início* em u e *término* em v. Também dizemos que u e v são os extremos de α ou que u e v são *adjacentes*.

O *grau de saida* de um vértice v num grafo D é o número de arcos em D com início em v e o denotamos por $d^+_D(v)$. O *grau de entrada* de v é o número de arcos com término em v e será denotado por $d^-_D(v)$.

Ordem, tamanho, subgrafo, coloração e coloração restrita de um grafo orientado D possuem definições análogas àquelas dadas para grafos não orientados.

O *grafo base* de um grafo orientado D é o grafo G obtido substituindo-se cada arco por uma aresta. Dizemos que D é uma *orientação* de G se e só se G é grafo base de D.

Um *caminho orientado* é um grafo orientado P com $V_P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ não vazio e os v_i *'s* todos distintos e $E_P = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$. Se $k \geq 2$, então $C := (V_P, E_P \cup \{(v_k, v_1)\})$ é chamado de *circuito orientado*. Um *ciclo orientado* é uma união de circuitos orientados disjuntos nas arestas. Um grafo orientado que não contém nenhum circuito orientado é chamado de *acíclico*.

Para grafos orientados adotamos a mesma abreviatura definida para os grafos não orientados na seção 1.

Um grafo D é *euleriano* se e só se $d^+_D(v) = d^-_D(v)$ para todo vértice $v \in V$, ou seja, D contém um ciclo orientado P com $E_P = E_D$. Se D é um grafo orientado, um subconjunto $E \subseteq E_D$ é chamado *conjunto euleriano de arcos de* D se e só se (V_D, E) é um grafo euleriano. Definimos os números:

$\eta_0(D) := |\{E : E$ é um conjunto Euleriano de arcos de D e $|E|$ é par$\}|$ e

$\eta_1(D) := |\{E : E$ é um conjunto Euleriano de arcos de D e $|E|$ é ímpar$\}|$.

Note que para todo grafo D temos $\eta_0(D) \neq 0$, pois o subgrafo $(V_D, \emptyset)$ é euleriano.

Teorema 6.1 (Alon e Tarsi [2])

Seja D um grafo orientado e L uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|L(v)| = d^+_D(v) + 1$ para todo $v \in V$. Se $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$, então D admite uma L-coloração.

A afirmação do teorema 6.1, para o caso especial de grafo orientado acíclico, implica 4.1 e pode ser provado usando-se indução na ordem do grafo. Os lemas a seguir fornecem o esboço para a prova de 6.1.

Para as definições básicas, relativas a grupo e anel, necessárias para tratar de abordagem algébrica no lema seguinte citamos [17]. A prova do lema 6.2 é por indução em n.

Lema 6.2

Seja $p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio sobre o anel de números inteiros $\mathbb{Z}$. Suponha que o grau de p, como polinômio em x_i, é no máximo d_i para todo i, $1 \leq i \leq n$ e seja S_i um subconjunto de $\mathbb{Z}$ com $d_i + 1$ números distintos para todo i, $1 \leq i \leq n$. Se $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ para toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, então $p \equiv 0$.

Se G é um grafo não orientado com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então o *polinômio de* G é

$$f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \prod_{i<j, v_iv_j \in E_G} (x_i - x_j)$$

Lema 6.3

Se D é uma orientação de um grafo G com $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, $d_i := d^+_D(v_i)$, então o valor absoluto do coeficiente do monômio $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ na representação de f_G como combinação linear de monômios é $|\eta_0(D) - \eta_1(D)|$.

Para a prova desta lema, observamos que em todo grafo G os coeficientes dos monômios que aparecem na representação de f_G, como combinação linear de monômios, podem ser expressos em termos das orientações de G. Em seguida mostramos que existe uma bijeção entre o conjunto de todas as orientações D_1 de G com $d^+_{D_1}(v) = d_i$ e o conjunto de todos os subgrafos eulerianos de D.

Para a prova do teorema 6.1 consideramos D um grafo com $V_D = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e L uma atribuição de listas de cores. Denotamos por $d_i := d^+_D(v_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Seja G o grafo base de D (note que G permite várias arestas ligando um mesmo par de vértices). Suponhamos que G não admite uma L-coloração, o que implica em $f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $L(v_1) \times \ldots \times L(v_n)$. Definimos o polinômio $Q_i(x_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, como:

$$Q_i(x_i) := \prod_{l \in L(v_i)} (x_i - l) = x_i^{d_i+1} - \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j$$

Se $x_i \in L(v_i)$, então $Q_i(x_i) = 0$, isto é,

$$x_i^{d_i+1} = \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j. \tag{6.1}$$

Seja $\overline{f_G}$ o polinômio obtido pela representação de f_G como combinação linear de monômios, substituindo-se repetitivamente cada ocorrência de $x_i^{f_i}$, para todo i onde $f_i > d_i$, por uma combinação linear de x_i's com potência menor que f_i, para tanto usamos as equações 6.1. Mostramos que o lema 6.2 implica em $\overline{f_G} \equiv 0$. Como $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$ segue do lema 6.3 que o coeficiente do monômio $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em f_G é não nulo. Finalmente, mostramos que o coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em $\overline{f_G}$ é igual ao coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em f_G, que é não nulo, o que é uma contradição com $\overline{f_G} \equiv 0$.

Uma aplicação do teorema 6.1 está na resolução de um dos problemas sugeridos pelos autores de [10].

Teorema 6.4 ([2])
Todo grafo planar G bipartido satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$.

Primeiramente, definimos $s(G) := \max\limits_{H \subseteq G} \frac{d(H)}{2}$ e provamos que: *todo grafo bipartido G satisfaz* $\mathrm{ch}(G) \leq \lceil s(G) \rceil + 1$. A prova deste fato segue do seguinte modo: denotamos $k := \lceil s(G) \rceil$ e definimos o grafo K com bipartição (A, B) tal que $A := E_G$, B é união de k cópias $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de V_G e $\{\alpha, u\} \in E_K$ se e só se u é extremo de α em G, isto é, cada vértice $\alpha = uv$ de A é ligado por arestas de K a k cópias de u e a k cópias de v em B. Veremos que o teorema de Hall, vide [9, p. 31], e o fato de que $s(G) \leq k$ implica que K tem um emparelhamento M de tamanho $|A| = \|G\|$. Para todo $\{\alpha, u\} \in M$ orientamos a aresta α de G de modo que início seja em u. A orientação D obtida satisfaz $d_D^+(v) \leq k$ para todo $v \in V_D$. G não contém circuitos ímpares pois é bipartido, logo $\eta_1(D) = 0$. Portanto, $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$ e a afirmação acima segue de 6.1. Finalmente, mostramos que *todo grafo planar G bipartido satisfaz* $s(G) \leq 2$.

Provamos, também que $\mathrm{ch}(K_{2,4}) > 2$, logo o resultado obtido é exato.

7 A conjectura da coloração restrita de arestas

Tratamos nesta seção da conjectura da coloração restrita de arestas sugerida por Vizing e aparentemente publicada primeiro em artigo de Bollobás e Harris [6].

A seguir definimos os conceitos envolvendo coloração restrita de arestas.

Dado um grafo G e uma atribuição $\Lambda : E \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores às arestas de G, uma *coloração restrita de arestas que respeita* Λ ou Λ-*aresta-coloração* de G é uma Λ-coloração de seu grafo-linha $L(G)$.

O *número aresta-cromático restrito* (*list-chromatic index*), $\mathrm{ch}'(G)$, é o número cromático restrito do grafo-linha de G. E o *número aresta-cromático* de G, $\chi'(G)$, é o número cromático de $L(G)$.

Segue da definição que

$$\textit{Para todo grafo } G,\ \mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G).$$

Conjectura 7.1 (Conjetura da coloração restrita de arestas)
Todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Na verdade, a conjectura foi proposta para multigrafos. Um *multigrafo* é uma generalização do conceito de grafo que permite várias arestas ligando um mesmo par de vértices.

Embora esta conjectura permaneça em aberto, houve um progresso considerável em seu estudo. Na subseção que se segue, apresentamos duas classes de grafos que satisfazem a conjectura. Na subseção 7.2 estudamos uma aproximação da igualdade sugerida pela conjectura.

7.1 A conjectura da coloração restrita de arestas para duas classes de grafos

A igualdade na conjectura 7.1 foi verificada somente para alguns poucos casos. Por exemplo, ela é trivialmente válida para árvores e grafos com o grau máximo menor que 3. Seguem duas classes de grafos menos triviais.

Usando o teorema 6.1, Häggkvist e Janssen obtiveram o seguinte resultado, que prova a conjectura 7.1 para grafos completos de ordem ímpar.

Teorema 7.2 ([13])
Para todo n, $\mathrm{ch}'(K_n) \leq n$.

Para a prova deste teorema aplica-se o teorema de Alon e Tarsi ao grafo linha de K_n. Todo grafo linha $L(G)$ pode ser escrito como união de cliques aresta-disjuntos, onde cada clique corresponde a um vértice de G e tal que todo vértice de $L(G)$ pertence a exatamente dois cliques que compõe $L(G)$. Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo. Um torneio D é *transitivo* se $\{(u,v),(v,w)\} \subseteq E_D$ implica em $(u,w) \in E_D$. Uma orientação D de $L(G)$ é *clique-transitiva* se ela induz em cada clique um torneio transitivo. Se temos uma decomposição de um grafo $L(G)$ em cliques, então para aplicar o teorema de Alon e Tarsi é suficiente considerar somente as orientaçoes clique-transitivas de $L(G)$. Häggkvist e Janssen aplicaram a técnica de “blocking out” para eliminar certos valores dos possíveis graus de saída de vértices de um clique para reduzir, mais ainda, o número de orientações que consideramos. Descrevemos, a seguir, um algoritmo que atribui a cada vértice de $L(K_n)$ os graus de saida de modo que a atribuição definida pelo algoritmo determina a única orientação clique-transitiva de $L(K_n)$, conforme os valores eliminados pela técnica de “blocking out”. Isto implica em $\mathrm{ch}'(K_n) \leq n$.

A conjectura 7.1 para grafos bipartidos completos equivale ao *problema dos quadrados latinos*, conhecido como *conjetura de Dinitz*, citada na introdução deste texto. A conjetura de Dinitz é conseqüência do seguinte resultado devido a Galvin.

Teorema 7.3 ([11])
Todo multigrafo bipartido G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Para a demonstrar este teorema seguiremos a prova apresentada por Slivnik em [19], baseada na prova de Galvin, porém elementar e auto-contida.

A parte central da prova é o lema 7.4.

Se G é um multigrafo bipartido com bipartição (X, Y) e $\alpha \in E_G$, denotamos por α_X e α_Y os extremos de α em X e Y respectivamente.

Lema 7.4 ([19])

Se G é um multigrafo bipartido, ϕ uma aresta-coloração de G e para todo $\alpha \in E_G$, $T_G(\alpha) := |\{\beta \in E_G : \alpha_X = \beta_X, \phi(\beta) > \phi(\alpha)\}| + |\{\beta \in E_G : \alpha_Y = \beta_Y, \phi(\beta) < \phi(\alpha)\}|$, então $\mathrm{ch}'(G) \leq T_G + 1$ onde $T_G := \max_{\alpha \in E_G} T_G(\alpha) + 1$.

A prova deste lema é por indução em $\|G\|$. Seja Λ uma atribuição de listas de cores às arestas de G com $|\Lambda(\alpha)| > T_G(\alpha)$ para todo $\alpha \in E$. Se c é uma cor do conjunto $\bigcup_{\alpha \in E} \Lambda(\alpha)$ e $I := \{\alpha \in E_G : c \in \Lambda(\alpha)\}$, usando indução em $|I|$ mostramos que existe um emparelhamento $M \subseteq I$ tal que para toda aresta $\alpha \in I \setminus M$, existe uma aresta $\beta \in M$ que satisfaz $\alpha_X = \beta_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\alpha)$ ou $\alpha_Y = \beta_Y$ e $\phi(\beta) < \phi(\alpha)$. Isto implica que G admite uma Λ-aresta-coloração.

7.2 Limitantes superiores para o número aresta-cromático restrito

Pelo teorema de Vizing, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ para todo garfo G [9, p. 103]. Assim, a conjectura 7.1 sugere que também $\mathrm{ch}'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Pode se mostrar que $\mathrm{ch}'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G. Ainda, como observado pelos autores de [6], se G é tal que $\Delta(G) > 2$, então $\mathrm{ch}'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$.

Bollobás e Harris [6] foram os primeiros a obter um resultado assintótico. Eles provaram que $\mathrm{ch}'(G) \leq \frac{11}{6}\Delta(G) + o(\Delta(G))$ para todo grafo G. O limite superior para o número aresta-cromático restrito de grafos foi melhorado para $\frac{7}{4}\Delta + o(\Delta)$ por Bollobás e Hind [7], e posteriormente para $\Delta + o(\Delta)$ por Kahn [16]. Mencionamos um resultado nesta linha, obtido por Häggkvist e Janssen [13] combinando métodos probabilisticos e algébricos.

Teorema 7.5 ([13])

Todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) \leq \Delta + O(\Delta^{\frac{2}{3}}\sqrt{\log \Delta})$.

Para a prova deste teorema, fazendo uso de técnica similar ao método usado na prova do teorema 7.2, construímos uma classe $\mathcal{G}$ de grafos tal que para todo grafo G nesta classe o valor de $\mathrm{ch}'(G)$ é próximo de $\Delta(G)$ e estimamos o número aresta-cromático restrito para a união de grafos que pertencem a $\mathcal{G}$. Usando o Lema Local de Erdős e Lovász (que é um resultado probabilístico) e alguns limitantes "padrão" da cauda da distribuição binomial mostramos que todo grafo pode ser expresso como tal união.

8 Projeto

Pretendo re-escrever todos os resultados mencionados acima de maneira unificada e uniforme. Pretendo estudar também alguns assuntos não mencionados acima, como o *fractional chromatic number* [3], intimamente relacionado com o conceito de $(a : b)$-*choosability* definido por Erdős, Rubin e Taylor em [10].

Referências

[1] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993 (Keele)*, pages 1–33. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2):125–134, 1992.

[3] N. Alon, Zs. Tuza, and M. Voigt. Choosability and fractional chromatic numbers. *Discrete Mathematics*, 165/166:31–38, 1997. Graphs and combinatorics (Marseille, 1995).

[4] M. Bíró, M. Hujter, and Zs. Tuza. Precoloring extension. I. Interval graphs. *Discrete Mathematics*, 100(1-3):267–279, 1992. Special volume to mark the centennial of Julius Petersen's "Die Theorie der regulären Graphs", Part I.

[5] B. Bollobás. The chromatic number of random graphs. *Combinatorica*, 8(1):49–55, 1988.

[6] B. Bollobás and A. J. Harris. List-colourings of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1(2):115–127, 1985.

[7] B. Bollobás and H. R. Hind. A new upper bound for the list chromatic number. *Discrete Mathematics*, 74(1-2):65–75, 1989.

[8] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[9] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.

[10] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*, pages 125–157, Winnipeg, Man., 1980. Utilitas Math.

[11] F. Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(1):153–158, 1995.

[12] S. Gutner. The complexity of planar graph choosability. *Discrete Mathematics*, 159(1-3):119–130, 1996.

[13] R. Häggkvist and J. Janssen. New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3):295–313, 1997.

[14] K. Jansen and P Scheffler. Generalized coloring for tree-like graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 75(2):135–155, 1997.

[15] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. A Wiley-Interscience Publication.

[16] J. Kahn. Asymptotically good list-colorings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 73(1):1–59, 1996.

[17] S. Lang. *Algebraic Structures.* Addison-Wesley, New York, second edition, 1967.

[18] C. McDiarmid. *Discrete Mathematics and Radio Channel Assignment.* Notas de aula, Brazilian Summer School on Combinatorics and Algorithms, Fortaleza, Brazil, 12–24 de março de 2001.

[19] T. Slivnik. Short proof of Galvin's theorem on the list-chromatic index of a bipartite multigraph. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(1):91–94, 1996.

[20] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 62(1):180–181, 1994.

[21] C. Thomassen. 3-list-coloring planar graphs of girth 5. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 64(1):101–107, 1995.

[22] V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Diskret. Analiz*, (29 Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem):3–10, 101, 1976.

[23] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 120(1-3):215–219, 1993.

[24] M. Voigt. A not 3-choosable planar graph without 3-cycles. *Discrete Mathematics*, 146(1-3):325–328, 1995.

[25] R. Škrekovski. Choosability of K_5-minor-free graphs. *Discrete Mathematics*, 190(1-3):223–226, 1998.