NÚMEROS DE RAMSEY INDUZIDOS E SEMI-INDUZIDOS

MÁRCIO GROSSI DE ALMEIDA

1. Introdução

Este é o projeto de pesquisa para o programa de mestrado do autor. A área contemplada é a área de teoria de Ramsey. Mais especificamente, planeja-se investigar certos problemas assintóticos relativos aos números de Ramsey induzidos e semi-induzidos.

A principal ferramenta que pretende-se utilizar é um método probabilístico que já demonstrou ser efetivo para problemas semelhantes. A grosso modo, dado um grafo arbitrário H, este método demonstra a existência de grafos de tamanho moderado em relação ao tamanho de H que, localmente, comportam-se como grafos aleatórios clássicos, mas que, globalmente, são muito ricos em cópias de H. Este método, descoberto por Brown e Rödl [1] (veja também Rödl e Winkler [17]), usa planos projetivos como ponto de partida.

2. Teoria de Ramsey: Algumas Definições e Notações

Nesta seção, serão introduzidas algumas definições e notações necessárias às seções subseqüentes. Assume-se, neste texto, que o leitor já esteja familiarizado com os conceitos básicos da teoria dos Grafos. A notação básica deste texto é extraída de Diestel [5]. A menos que seja mencionado o contrário, todos os grafos aqui referidos serão *simples* e *não-dirigidos*.

Seguem, abaixo, algumas definições e notações específicas da teoria de Ramsey.

Dados três grafos Γ, G e H, escrevemos $\Gamma \longrightarrow (G,H)$ se, em qualquer coloração das restas de Γ com as cores vermelha e azul, podemos encontrar um subgrafo vermelho de Γ isomorfo a G ou um subgrafo azul de Γ isomorfo a H. De forma análoga, definimos $\Gamma \xrightarrow{\text{ind}} (G,H)$, com a diferença que, neste caso, é exigido que os subgrafos de Γ isomorfos a H ou a G sejam *induzidos* em Γ.

Parte de nossa pesquisa está focada em uma relação "intermediária" às duas descritas acima. Assim como $\Gamma \xrightarrow{\text{ind}} (G,H)$, temos que $\Gamma \xrightarrow{\text{s,i}} (G,H)$ difere da relação $\Gamma \longrightarrow (G,H)$ somente pelo fato de que é exigido que *apenas* o subgrafo de Γ isomorfo a H seja induzido. A notação "s,i" denota que

Projeto de dissertação de mestrado sob orientação de Yoshiharu Kahayakawa.
Data: 20 de Setembro de 1999.

exigimos G como *subgrafo* de Γ e H como subgrafo *induzido* de Γ. Observe que é fácil verificar que

$$(1)\qquad \Gamma \xrightarrow{\text{ind}} (G,H) \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \xrightarrow{\text{s,i}} (G,H) \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \longrightarrow (G,H).$$

Um teorema clássico de Ramsey [15] mostra que para qualquer par de grafos (G,H), existe um grafo Γ tal que $\Gamma \longrightarrow (G,H)$. Desta forma, dado um par de grafos (G,H), chamaremos de *número de Ramsey* $r(G,H)$ a menor ordem possível para um grafo Γ tal que $\Gamma \longrightarrow (G,H)$. Mais formalmente, temos $r(G,H) = \min\{|V(\Gamma)| \colon \Gamma \longrightarrow (G,H)\}$. No caso "diagonal", escrevemos $r(H)$ no lugar de $r(H,H)$. Também costumamos escrever $r(n)$ no lugar de $r(K^n)$. Da mesma forma, definimos o *número de Ramsey para arestas* como $\hat{r}(G,H) = \min\{|E(\Gamma)| \colon \Gamma \longrightarrow (G,H)\}$. Pomos, também, $\hat{r}(H) = \hat{r}(H,H)$ e $\hat{r}(n) = \hat{r}(K^n)$.

Um outro resultado clássico descoberto independentemente por Deuber [4], Erdős, Hajnal e Pósa [6], e Rödl [16] garante que para qualquer par de grafos (G,H), existe um grafo Γ tal que $\Gamma \xrightarrow{\text{ind}} (G,H)$. Assim, dado um par de grafos (G,H), temos que a noção de número de Ramsey $r(G,H)$ pode ser estendida para o *número de Ramsey induzido* $r_{\text{ind}}(G,H)$, trocando-se a relação $\longrightarrow$ por $\xrightarrow{\text{ind}}$. Devido a (1), podemos estender também a mesma noção para o *número de Ramsey semi-induzido* $r_{\text{sind}}(G,H)$ trocando a relação $\longrightarrow$ por $\xrightarrow{\text{s,i}}$.

Analogamente, estendemos a noção de $\hat{r}(G,H)$ para $\hat{r}_{\text{ind}}(G,H)$ e também para $\hat{r}_{\text{sind}}(G,H)$. Assim como nos casos anteriores, colocamos $r_{\text{ind}}(H)$ para $r_{\text{ind}}(H,H)$, $r_{\text{sind}}(H)$ para $r_{\text{sind}}(H,H)$, $r_{\text{ind}}(n)$ para $r_{\text{ind}}(K^n)$, $r_{\text{sind}}(n)$ para $r_{\text{sind}}(K^n)$, $\hat{r}_{\text{ind}}(H)$ para $\hat{r}_{\text{ind}}(H,H)$, $\hat{r}_{\text{sind}}(H)$ para $\hat{r}_{\text{sind}}(H,H)$, $\hat{r}_{\text{ind}}(n)$ para $\hat{r}_{\text{ind}}(K^n)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(n)$ para $\hat{r}_{\text{sind}}(K^n)$.

Para finalizar esta seção, observamos que as desigualdades

$$(2)\qquad \begin{gathered} r(G,H) \leq r_{\text{sind}}(G,H) \leq r_{\text{ind}}(G,H) \\ \text{e} \\ \hat{r}(G,H) \leq \hat{r}_{\text{sind}}(G,H) \leq \hat{r}_{\text{ind}}(G,H). \end{gathered}$$

decorrem imediatamente de (1) e das definições acima.

3. Alguns Resultados na Teoria de Ramsey

Esta seção traz alguns resultados conhecidos na teoria de Ramsey que são relevantes para os focos de estudo deste projeto de dissertação.

3.1. **Números de Ramsey para vértices e arestas.** Como visto na seção anterior, Ramsey em [15] provou um resultado que garante a existência de $r(n)$ para todo n inteiro positivo. Este resultado não só garante a existência de $r(n)$, como também fornece um limitante superior, a saber, $r(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}$. Em 1947 Erdős provou um resultado que mostra que $r(n)$ é limitado inferiormente por $2^{n/2}$ quando n é um inteiro maior ou igual a 3. Os melhores limitantes de $r(n)$ conhecidos atualmente implicam que

$$2^{1/2} \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} r(n)^{1/n} \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} r(n)^{1/n} \leq 4. \tag{3}$$

Temos, assim, que a taxa precisa do crescimento exponencial de $r(n)$ é ainda desconhecida. Saber se $\lim_{n \longrightarrow \infty} r(n)^{1/n}$ existe e, no caso positivo, determinar o seu valor, são problemas importantes que permanecem em aberto na área.

Apesar de o número de Ramsey apresentar um crescimento exponencial para grafos completos, é razoável de se esperar que, para um grafo H com poucas arestas, $r(H)$ seja menor que $r(|V(H)|)$. De fato, existem algumas classes relativamente grandes de grafos para as quais o número de Ramsey apresenta um crescimento polinomial. Como exemplo, apresentamos a seguir um resultado sobre uma classe de pares de grafos que, em particular, está no primeiro foco de estudo deste projeto de dissertação. O teorema abaixo, extraído de Chvátal [2], constitui um dos raros casos onde o número de Ramsey de uma classe de grafos é conhecido com exatidão.

Teorema 1. *Para toda árvore T com m vértices, temos $r(T, K^n) = 1 + (m-1)(n-1)$.*

Um outro problema também considerado na literatura consiste na versão para arestas do problema descrito acima. A partir do Teorema 1 é fácil estabelecer um limitante superior "trivial" para $\hat{r}(T_m, K^n)$, onde T_m é uma árvore qualquer de ordem m:

$$\hat{r}(T_m, K^n) \leq \binom{r(T_m, K^n)}{2} < \frac{(nm)^2}{2}.$$

A seguir, temos um resultado extraído de Ke [9] que, através da utilização de métodos probabilísticos e uma técnica sofisticada de imersão de árvores devida a Friedman e Pippenger [7], fornece um limitante superior melhor para este problema.

Teorema 2. *Se d é um inteiro positivo fixo e $m^\beta < n < m^\gamma$ para algumas constantes β e γ, então, para n suficientemente grande, toda árvore $T_{n,d}$ de ordem n e grau máximo d satisfaz*

$$c_1 m^2 n \leq \hat{r}(T_{n,d}, K^m) \leq c(d, \beta, \gamma) m^2 n \log n,$$

onde c_1 é uma constante absoluta e $c(d, \beta, \gamma)$ depende apenas de d, β e γ.

Como poderá ser visto mais adiante, os Teoremas 1 e 2 servirão como "referenciais" no estudo de limitantes superiores para $r_{\text{sind}}(T_{n,d}, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T_{n,d}, H)$ respectivamente, para o caso em que H é um grafo qualquer.

3.2. **Números de Ramsey induzidos.** O caso *induzido* do problema tratado nos Teoremas 1 e 2 também está no nosso foco de interesse. Uma diferença está no fato que os resultados listados aqui referem-se a um limitante superior para $r_{\text{ind}}(T, H)$ e $\hat{r}_{\text{ind}}(T, H)$, onde T é uma árvore e H é um grafo *qualquer*.

Apesar da dificuldade trazida pelo fato de exigirmos cópias induzidas de T e H, é conhecido que tanto $r_{\text{ind}}(T, H)$ como $\hat{r}_{\text{ind}}(T, H)$ apresentam crescimento polinomial em relação a $|V(H)|$ e $|V(T)|$. Abaixo segue um teorema de Kohayakawa, Prömel e Rödl [10] que estabelece um limitante superior para $r_{\text{ind}}(T, H)$.

Teorema 3. *Dados uma árvore T e um grafo arbitrário H, temos*

$$r_{\text{ind}}(T, H) \leq ct^2h^4 \left(\frac{\log(th^2)}{\log\log\log(th^2)} \right)^2, \tag{4}$$

onde $t = |V(T)|$, $h = |V(H)|$ e c é uma constante absoluta.

Apesar de não constar explicitamente como um resultado, a demonstração do Teorema 3 em Kohayakawa, Prömel e Rödl [10] também fornece um limitante superior para $\hat{r}_{\text{ind}}(T, H)$, que enunciamos a seguir.

Teorema 4. *Dados uma árvore T e um grafo arbitrário H, temos*

$$\hat{r}_{\text{ind}}(T, H) \leq ct^3h^4 \left(\frac{\log(th^2)}{\log\log\log(th^2)} \right)^3 |E(H)|, \tag{5}$$

onde $t = |V(T)|$, $h = |V(H)|$ e c é uma constante absoluta.

Assim como os Teoremas 1 e 2, poderá ser visto mais adiante que os Teoremas 3 e 4 servirão como "referenciais" no estudo de $r_{\text{sind}}(T_{n,d}, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T_{n,d}, H)$, respectivamente.

3.3. **O estudo de $\max r_{\text{ind}}(H)$.** O nosso segundo foco de estudo está voltado para um outro problema clássico na teoria de Ramsey. Agora desejamos estimar $f(n) = \max r_{\text{ind}}(H)$, onde o máximo é sobre *todos* os grafos H de ordem n.

Um resultado não publicado de Rödl fornece que $f(n) \leq 2^{2^{n^{1+o(1)}}}$ (cf. [8]). O seguinte problema é devido a Graham e Rödl.

Problema 5. *Existe uma contante C para a qual vale que $f(n) \leq C^n$?*

Rödl provou através de seus métodos de [16] que $r_{\text{ind}}(H) \leq C^{|H|}$ para alguma constante C se H é um grafo bipartido. Łuczak e Rödl [11] provaram recentemente que $r_{\text{ind}}(H) \leq |H|^d$ para alguma constante $d = d(\Delta(H))$ que depende apenas do grau máximo $\Delta(H)$ de H, resolvendo assim positivamente um problema levantado por Trotter (cf. [8]). Observe que se a resposta ao Problema 5 for positiva, temos que o resultado, a menos pelo valor da constante C, é o melhor possível, pois existem grafos H para os quais $r_{\text{ind}}(H)$ é exponencial em $|V(H)|$ (basta tomar, por exemplo, o grafo K^n).

Tratando um caso mais geral, onde deseja-se estimar $\max r_{\text{ind}}(G, H)$ sobre todos os grafos G de ordem k e H de ordem t, Kohayakawa, Prömel, e

Rödl [10] recentemente obtiveram o seguinte resultado. Como de usual, $\chi(H)$ abaixo denota o número cromático de H.

Teorema 6. *Sejam G e H dois grafos com $|G| = k$ e $|H| = t$, onde $k \leq t$, e suponha que $q = \chi(H) \geq 2$. Então*

$$r_{\text{ind}}(G, H) \leq t^{Ck \log q} \tag{6}$$

para alguma constante absoluta $C > 0$.

Note que o resultado acima mostra que, para alguma constante absoluta $D > 1$, temos

$$f(n) \leq D^{n(\log n)^2},$$

onde $f(n)$ é como no Problema 5. Desta forma, o Teorema 6 chega bastante perto de resolver aquele problema.

O nosso estudo será voltado, em particular, para o Teorema 6, onde estudaremos o valor de $r_{\text{ind}}(G, H)$ no caso em que G possui grau limitado.

4. Alguns Resultados do Nosso Estudo

Esta seção traz alguns resultados obtidos dentro do nosso primeiro foco de estudo. Mostramos, nas subseções abaixo, os melhores limitantes superiores que encontramos para $r_{\text{sind}}(T, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H)$, no caso em que T é um árvore e H é um grafo qualquer.

4.1. Um limitante superior para $r_{\text{sind}}(T, H)$.

Este primeiro resultado, cuja prova é mais simples que a do resultado listado na Subseção 4.2, é obtido através de uma técnica utilizada por Kohayakawa, Prömel e Rödl em [10]. Com esta técnica, criamos um número grande de cópias induzidas do grafo H através da "explosão" de seus vértices.

Segue, abaixo, o nosso teorema sobre $r_{\text{sind}}(T, H)$.

Teorema 7. *Suponha que uma árvore T e um grafo H qualquer sejam dados. Se $h = |V(H)|$ e $t = |V(T)|$ então*

$$r_{\text{sind}}(T, H) \leq th^2. \tag{7}$$

Esboço da demonstração: Se $|V(H)| = 1$, o resultado é imediato. Suponha, então, $|V(H)| \geq 2$.

Considere o grafo G obtido pela "explosão" dos vértices do grafo H, onde cada vértice de H é substituído por um conjunto independente de ht vértices e cada aresta de H é substituída por uma cópia de $K^{ht,ht}$ colocada entre os conjuntos de vértices independentes relativos aos vértices nela incidentes. Observe que $|V(G)| = th^2$.

Agora considere $\mathcal{F}$, a família de todos os subconjuntos de $V(G)$ cuja intersecção com cada conjunto independente de vertices correspondente a um vértice de H em G possui exatamente um único elemento. É fácil verificar que $|\mathcal{F}| = (ht)^{|V(H)|}$ e que para qualquer $V \in \mathcal{F}$, vale que $G[V]$ (o grafo induzido por V em G) é isomorfo a H. Também é fácil verificar que, para toda aresta e de G, vale que

$$\big|\{V \in \mathcal{F}\colon e \in G[V]\}\big| = (ht)^{|V(H)|-2}. \tag{8}$$

Vamos mostrar que se as arestas de G forem coloridas com as cores vermelha e azul, de forma que não haja uma cópia azul *induzida* de H em G, então G possui, pelo menos, $(ht)^2$ arestas de cor vermelha.

De fato, suponha que a afirmação acima seja falsa e que exista uma coloração das arestas de G com as cores vermelha e azul tal que não haja cópia azul induzida de H em G e G possua menos de $(ht)^2$ arestas vermelhas. Observe então que por (8), *menos* de $(ht)^2 \times (ht)^{|V(H)|-2}$ conjuntos de $\mathcal{F}$ induzem, em G, um grafo contendo alguma aresta na cor vermelha. Ou seja, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $G[V]$ possui somente arestas azuis, contradizendo a nossa hipótese.

Agora observe que se G possuir pelo menos $(ht)^2$ arestas vermelhas, podemos remover, um após o outro, todos os vértices de G que incidem em menos de t arestas vermelhas. Ao final deste processo obtemos um subgrafo G' de G constituído apenas por arestas vermelhas e cujo grau mínimo é maior ou igual a t. É fácil provar de forma indutiva que G' possui todas as árvores de ordem menor ou igual a t.

Desta forma, temos claramente $G \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H)$ e o resultado segue. □

4.2. **Um limitante superior para $\hat{r}_{\mathrm{sind}}(T,H)$.** Como podemos observar na demonstração do Teorema 7, o grafo G obtido pela "explosão" dos vértices de H possui exatamente $(ht)^2|E(H)|$ arestas. Veremos, agora, como é possível melhorar este resultado.

Primeiro, vamos enunciar uma técnica sofisticada de imersão de árvores devida a Friedman e Pippenger [7]. Como de usual, $\Gamma_G(V)$ denota a vizinhança do conjunto de vértices V no grafo G.

Teorema 8. *Se H é um grafo não vazio tal que, para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \le 2n-2$ vale que*

$$|\Gamma_H(X)| \ge (d+1)|X|,$$

então H contém toda árvore com n vértices e grau máximo menor ou igual a d.

O resultado que segue abaixo é o fruto da aliança entre o resultado dado pelo Teorema 8 e a técnica de prova do Teorema 3 em [10].

Teorema 9. *Suponha que uma árvore T e um grafo H qualquer sejam dados. Existe uma constante c positiva tal que se $h = |V(H)|$, $t = |V(T)|$ e $d = \Delta(T)$ então*

$$\hat{r}_{\mathrm{sind}}(T,H) \le c d^{9/2} h^2 \{t \ln[d^3 h^2 t]\}^{3/2} |E(H)|. \tag{9}$$

Devido à falta de espaço, comentaremos apenas em linhas gerais a demonstração do Teorema 9. Nesta demonstração utilizaremos uma classe de grafos aleatórios cuja construção é baseada em planos projetivos — para o leitor não familiarizado com planos projetivos, uma boa leitura introdutória pode ser encontrada no Capítulo 8 de Matoušek e Nešetřil [12].

Primeiramente, toma-se um plano projetivo com o número de pontos da ordem de $d^3h^2t\ln(d^3h^2t)$ — os grafos aleatórios utilizam este conjunto de pontos como conjunto de vértices. A classe de grafos aleatórios é obtida através da inserção aleatória de cópias do grafo H no plano projetivo em questão. Cada linha do plano projetivo recebe um número fixo de cópias de H, duas-a-duas disjuntas nos vértices. Como cada cópia de H inserida é *induzida*, temos um número bem definido de cópias induzidas do grafo H para considerarmos dentro de cada grafo desta classe de grafos aleatórios — observe que estamos ignorando qualquer cópia espontânea de H que possa surgir. Desta forma, provamos que se qualquer grafo da nossa classe de grafos não possuir uma cópia azul induzida de H em uma coloração de suas arestas com as cores vermelha e azul, então este grafo deve obrigatoriamente possuir um subgrafo de arestas vermelhas, digamos G', com o grau mínimo limitado inferiormente e cujo conjunto de arestas é disjunto em cada linha do plano projetivo. Através do Teorema 2.5 de McDiarmid [13], que é uma desigualdade exponencial para a probabilidade de grandes desvios, conseguimos provar que existe pelo menos um grafo em nossa classe de grafos aleatórios que apresenta a propriedade expansora exigida no Teorema 8 em todos os seus subgrafos como G' descrito anteriormente. Utilizando o Teorema 8, temos então que existe um grafo G em nossa classe de grafos aleatórios tal que $G \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H)$, o que prova o Teorema 7.

5. Dois Temas de Estudo

Nesta seção apresentaremos os dois focos de estudo que pretendemos considerar na dissertação de mestrado.

5.1. Investigação sobre $r_{\text{sind}}(T, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H)$. Neste primeiro foco de estudo pretendemos investigar limitantes superiores para $r_{\text{sind}}(T, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H)$, no caso em que T é uma árvore e H é um grafo qualquer. Como pôde ser visto na Seção 4, alguns resultados já foram obtidos.

A partir da desigualdade (2), temos que, apesar de estarmos comparando problemas intrinsecamente diferentes, os números obtidos no Teorema 7 parecem bastante razoáveis quando comparados aos números do Teorema 3. Ao tomarmos $H = K^h$, vemos que o limitante superior fornecido para $r_{\text{sind}}(T, H)$ difere do valor de $r(T, H)$, dado pelo Teorema 1, apenas por um fator linear em h e, por isso, acreditamos que o resultado do Teorema 7 seja bastante forte.

Novamente baseados na desigualdade (2), podemos observar que, para o caso em que T possui grau limitado, a desigualdade (9) fornece números melhores que o limitante superior "trivial" fornecido por (5). Mas, em contrapartida, este mesmo resultado não parece satisfatório frente ao resultado do Teorema 2 quando tomamos $H = K^n$.

Pretendemos estudar um resultado de Nešetřil e Rödl [14] que assegura a existência de hipergrafos esparsos (ou seja, sem circuitos curtos) com o número de arestas limitado inferiormente. Uma alteração na técnica de Nešetřil e Rödl pode fornecer um novo limitante superior para $\hat{r}_{\mathrm{sind}}(T,H)$. Esclareceremos este ponto em investigações futuras.

5.2. **O caso em que G tem grau limitado no Teorema 6.** Este segundo foco de estudo busca um refinamento do Teorema 6 que, como observado por Kohayakawa, Prömel e Rödl em [10], pode muito provavelmente ser provado da seguinte forma. Como é bem conhecido, a imersão de um grafo dado G em grafos pseudo-aleatórios é facilitada se sabemos que G tem grau limitado. (Temos em mente aqui a técnica clássica de Chvátal, Rödl, Szemerédi, e Trotter [3].)

A observação acima deve ser suficiente para se refinar (6) para

$$r_{\mathrm{ind}}(G,H) \leq 2^{c_1 k} t^{c_2 \Delta \log q}, \tag{10}$$

onde $\Delta = \Delta(G)$ é o grau máximo de G e c_1 e c_2 são constantes universais.

Referências

1. J.I. Brown and V. Rödl, *A Ramsey type problem concerning vertex colourings*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **52** (1991), no. 1, 45–52, MR92c:05108.
2. V. Chvátal, *Tree-complete graph ramsey numbers*, Journal of Graph Theory **1** (1977), 93.
3. V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi, and W.T. Trotter, *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983), no. 3, 239–243, MR85f:05085.
4. W. Deuber, *A generalization of Ramsey's theorem*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 323–332.
5. R. Diestel, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1996.
6. P. Erdős, A. Hajnal, and L. Pósa, *Strong embeddings of graphs into colored graphs*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 585–595.
7. J. Friedman and N. Pippenger, *Expanding graphs contain all small trees*, Combinatorica **7** (1987), no. 1, 71–76, MR88k:05063.
8. R.L. Graham and V. Rödl, *Numbers in Ramsey theory*, Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge–New York, 1987, pp. 112–153.
9. X. Ke, *The size Ramsey number of trees with bounded degree*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 85–97.
10. Y. Kohayakawa, H.-J. Prömel, and V. Rödl, *Induced Ramsey numbers*, Combinatorica **18** (1998), no. 3, 373–404.
11. T. Łuczak and V. Rödl, *On induced Ramsey numbers for graphs with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **66** (1996), no. 2, 324–333.
12. J. Matoušek and J. Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, Oxford.
13. C. McDiarmid, *Concentration*, Algorithms and Combinatorics (J. Ramirez-Alfonsin M. Habib, C. McDiarmid and B. Reed, eds.), vol. 16, Springer-Verlag, 1998, pp. 195–248.

14. J. Nešetřil and V. Rödl, *On a probabilistic graph-theoretical method*, Proceedings of the American Mathematical Society **72** (1978), no. 2, 417–421.
15. F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society **30** (1930), 264–286.
16. V. Rödl, *The dimension of a graph and generalized Ramsey theorems*, Master's thesis, Charles University, 1973.
17. V. Rödl and P. Winkler, *A Ramsey-type theorem for orderings of a graph*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **2** (1989), no. 3, 402–406, MR90g:05135.