Agradecimentos

- Ao Yoshi, pela orientação e paciência. Seu entusiasmo e paixão pela Matemática proporcionam um ambiente estimulante a seus alunos.

- Aos professores Ricardo Bianconi e Fábio Machado pelas conversas, sugestões, apoio e incentivo.

- Ao Jair Donadelli Jr. por ter me acompanhado na compreensão de resultados, pelas sugestões e comentários e por ter lido todo o presente texto. O mesmo agradecimento também para o Orlando Lee pelos comentários e por também ter tido a paciência de ler o texto. Ao Luís "grande mogiano!" Esteves pelas conversas sobre probabilidade.

- Ao meu irmão Isamu Suzuki pelas estimulantes conversas sobre Matemática.

- Aos meus amigos desde os tempos da graduação em especial para: Flávio "aleatório" Yamamoto, Edson "lógico!" Tsukimoto, Jefferson "fala aí, chefe!" Zanutto, Clóvis Hanashiro, Jõao Paulo e Luciano Silva.

- Aos queridos Gaspar Pacho, Ana Lúcia, Reinaldo Bianchi, Agostinho, Eugênio Nassu e Isabel Italiano pela amizade.

- Ao amigo Andreas Brunner pelas conversas sobre o Teorema de Ehrenfeucht. Aliás, foi ele que me ensinou a pronunciar "Ehrenfeucht" corretamente.

- Dado que "um matemático é um ser capaz de converter café em teoremas", agradeço às tias Dalvina, Maria e Jovita pelo café ao longo desses anos.

- Ao pessoal da biblioteca e em especial para o Max, a Célia, Marina, Sílvia e Luíza.
- A querida Professora Wang pelos ensinamentos sobre filosofia chinesa que tanto me apoiaram durante a fase final do trabalho de mestrado.
- Finalmente, aos meus queridos pais a quem eu devo tudo que consegui. A minha querida esposa Mayumi que sempre me apoiou.

Abstract

The object of study in this dissertation is the model $G_{n,p(n)}$ for random graphs. We study the probability of $G_{n,p(n)}$ satisfying graph properties which can be expressed in a first-order theory. The study of this probability is done in asymptotic terms, that is, when the number of vertices n of $G_{n,p(n)}$ tends to infinity. In particular, we are interested in the case that this probability converges to 0 or 1 (zero-one laws). As a tool in the study of this probability, we use the Ehrenfeucht Game and Theorem. We present two major results in the field: the Glebskii-Fagin Theorem as well as the Shelah-Spencer Theorem.

Resumo

O objeto de estudo desta dissertação é o modelo $G_{n,p(n)}$ de grafos aleatórios. Estudamos a probabilidade de $G_{n,p(n)}$ satisfazer propriedades que podem ser expressas numa teoria de primeira ordem de grafos. O estudo desta probabilidade é feito em termos assintóticos, ou seja, quando o número de vértices n de $G_{n,p(n)}$ tende ao infinito. Particularmente, estamos interessados no caso em que a probabilidade acima mencionada converge para 0 ou para 1 (lei zero-um). Como ferramenta no estudo dessa probabilidade, utilizamos o Jogo de Ehrenfeucht. Apresentamos dois importantes resultados na área: o de Glebskii-Fagin e de Shelah-Spencer.

Sumário

Introdução

Um dos objetivos de estudarmos estruturas aleatórias discretas é estimar a probabilidade da estrutura aleatória em questão apresentar uma certa propriedade. Geralmente, estamos apenas interessados nos valores assintóticos destas probabilidades, ou seja, no limite da probabilidade quando o *tamanho* da estrutura aleatória em questão tende ao infinito. A existência desses limites depende muito da estrutura em estudo e da *linguagem* onde as propriedades que desejamos estudar estão expressas.

Um fenômeno peculiar acontece quando o limite acima descrito é igual a 0 ou a 1: isto, a grosso modo, quer dizer que a partir de um certo "momento" no crescimento da estrutura podemos constatar a ausência, ou a presença, da propriedade em estudo. Dizemos, a grosso modo, que vale a lei zero-um para a estrutura em questão [1]. Podem ser feitas as seguintes perguntas: Quais são as *propriedades* nas quais o fenômeno zero-um acontece? Como são as *linguagens* onde podemos expressar estas propriedades?

Um *survey* sobre leis zero-um para diversas estruturas aleatórias pode ser encontrado em [**19**] de Winkler e dentre elas temos grafos, ordens e intervalos. Os objetos de estudo do presente trabalho são os grafos aleatórios de Erdős e Rényi [**6**] para os quais estudamos dois importantes resultados sobre leis zero-um: o Teorema de Glebskii-Fagin e o Teorema de Shelah-Spencer.

Um grafo, do ponto de vista da teoria dos modelos, é uma estrutura. Quando nos referimos a modelos automaticamente devemos nos referir também a fórmulas que estes modelos satisfazem. Estas fórmulas devem ser expressas em alguma linguagem. Posto isto, podemos expressar propriedades de grafos através de fórmulas de uma dada linguagem. Utilizamos no presente trabalho a linguagem de primeira ordem dos grafos e consideramos as propriedades de grafos que podem ser expressas nesta linguagem.

Um grafo aleatório é basicamente o seguinte: temos um conjunto de n vértices rotulados por 1 até n e a probabilidade dos vértices i e j constituírem uma aresta é $p(n)$. A ocorrência de leis zero-um está diretamente relacionada à função $p(n)$.

Novamente, como um grafo é uma estrutura, podemos considerar o jogo de Ehrenfeucht para grafos. Apresentamos neste trabalho um resultado que relaciona jogos de Ehrenfeucht em grafos aleatórios com a função $p(n)$ de um

[1] Definimos rigorosamente o conceito de lei zero-um bem como outros conceitos no Capítulo 1.

grafo aleatório e, conseqüentemente, com o fenômeno zero-um. Com esta abordagem, o estudo do fenômeno zero-um se reduz ao estudo de estratégias vitoriosas para jogos de Ehrenfeucht em grafos aleatórios.

O presente texto está dividido da seguinte maneira: o **Capítulo 1** contém os conceitos preliminares que estão presentes ao longo de todo texto: grafos aleatórios e enraizados, extensões, fechos, Jogo de Ehrenfeucht.

Dedicamos o **Capítulo 2** ao Teorema de Ehrenfeucht que expressa fatos importantes para o desenrolar do restante do texto. Na seção 2.1 destacamos dois resultados básicos sobre o Jogo de Ehrenfeucht; na seção 2.2 apresentamos as fórmulas de m-Hintikka bem como alguns resultados correlatos. Estas fórmulas nos auxiliam na prova do Teorema de Ehrenfeucht na seção 2.3. Optamos por apresentar o Teorema de Ehrenfeucht em sua forma original para estruturas em geral. Assim, o leitor de combinatória que não estiver familiarizado pode ter uma visão mais geral do Jogo e do Teorema.

Apresentamos no **Capítulo 3** o resultado que relaciona o Jogo de Ehrenfeucht em grafos aleatórios a leis zero-um. Chamamos este resultado de *ponte* e o apresentamos na seção 3.1. A seguir, na seção 3.2, apresentamos o primeiro resultado sobre leis zero-um, a saber, o resultado de Glebskii-Fagin. Este resultado já nos mostra uma estratégia vitoriosa em jogos de Ehrenfeucht para grafos. Em sua demonstração, já utilizamos a *ponte*.

O **Capítulo 4** é reservado ao resultado principal de nosso texto: o resultado de Shelah-Spencer. Na seção 4.1 apresentamos fatos básicos sobre grafos enraizados; na seção 4.2 apresentamos resultados relativos a fechos e extensões e na seção 4.3 temos a prova do Teorema de Shelah-Spencer. A idéia deste resultado é a mesma da do resultado de Glebskii-Fagin porém a estratégia vitoriosa é bem mais elaborada.

Reservamos o **Capítulo 5** para breves comentários sobre resultados posteriores aos abordados aqui neste trabalho. Também fazemos algumas considerações finais.

CAPíTULO 1

Noções Preliminares

Veremos neste capítulo as notações, definições e conceitos básicos que utilizamos ao longo do texto.

1.1. Grafos aleatórios e grafos enraizados

Veremos nesta seção definições e conceitos básicos relativos a grafos, grafos aleatórios e grafos enraizados. Uma referência sobre grafos é [**1**] e sobre grafos aleatórios é [**2**] ambos de Bollobás. O artigo pioneiro sobre grafos aleatórios é [**6**] de Erdös e Rényi. Dentre as referências sobre grafos enraizados, podemos citar [**13**] de Spencer e Shelah e [**16**] de Spencer.

Seja m um número inteiro positivo. Representamos $\{1, 2, \dots, m\}$ por $[m]$. Seja k um inteiro não negativo. Dizemos que um conjunto finito A é um k-*conjunto* se A tem k elementos. Seja A um conjunto finito. Representamos por $A^{(k)}$ a coleção de todos os k-subconjuntos de A.

Definimos um *grafo* G como sendo um par ordenado (V, E) onde $V = V(G)$ é um conjunto finito e $E = E(G)$ é um subconjunto de $V^{(2)}$. Geralmente, chamamos V de *conjunto de vértices* e E de *conjunto de arestas.* Dado um grafo G, se $\{x, y\} \in E(G)$, também dizemos que x é *adjacente* a y e podemos representar este fato por $x \sim y$.

Consideremos um inteiro positivo n e uma função $p = p(n)$ com domínio no conjunto dos naturais e contradomínio (0,1). Para cada par $\{i, j\}$ de inteiros de $[n]$, seja X_{ij} uma variável aleatória de Bernoulli tal que

$$\Pr(X_{ij} = 1) = p$$

e todas as X_{ij} independentes. Definimos o *grafo aleatório* $G_{n,p(n)}$ no conjunto de vértices $[n]$ colocando os vértices i e j adjacentes só quando $X_{ij} = 1$. Dizemos que n é o *tamanho* do grafo aleatório $G_{n,p(n)}$. Se p for uma função constante, por exemplo, $p(n) = k$ tal que k é um real estritamente entre 0 e 1, podemos representar o grafo aleatório correspondente por $G_{n,k}$.

Definimos um *grafo enraizado* como sendo um par (R, H) tal que H é um grafo com conjunto de vértices, por exemplo, $V(H) = \{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_v\}$ e $R = \{y_1, \dots, y_r\}$ um conjunto específico de vértices, chamados de *raízes.* Representamos por $v = (R, H)$ o número de vértices que não são raízes e por $e = e(R, H)$ o número de arestas excluindo aquelas cujos vértices são ambos raízes. Dizemos que (R, H) tem *tipo* (v, e) com $v = v(R, H)$ e $e = e(R, H)$.

Seja α um número irracional estritamente entre 0 e 1. Consideremos também um grafo enraizado (R, H) com tipo (v, e). Dizemos que

1. (R, H) é *α-denso* se $v - e\alpha < 0$;
2. (R, H) é *α-esparso* se $v - e\alpha > 0$;
3. (R, H) é *α-rígido* se para todo S com $R \subseteq S \subset V(H)$ com (S, H) α-denso;
4. (R, H) é *α-seguro* se para todo S com $R \subset S \subseteq V(H)$ com (S, H) α-esparso;
5. (R, H) é *α-articulado* se for α-seguro e além disso para todo S tal que $R \subset S \subset H$ tivermos que (S, H) não é α-seguro.

A irracionalidade de α garante que qualquer grafo enraizado seja classificado como α-esparso ou como α-denso. Omitiremos o α quando estiver implícito no contexto.

Exemplo 1.1 (Denso, esparso, rígido, seguro e articulado). *Sejam α, β e γ irracionais tais que $\alpha \sim 0,42$, $\beta \sim 0,51$ e $\gamma \sim 0,1$. Consideremos os grafos enraizados (R_1, H) e (R_2, H) conforme a figura 1. Notemos que (R_1, H) é α-esparso, β-denso e γ-esparso. Temos que (R_2, H) é α-denso, β-denso e γ-esparso. Também observamos que (R_2, H) é β-rígido porém não é α-rígido pois basta pegar o conjunto $S = \{z_3, z_4, z_5, z_2, z_6, z_7, z_8\}$ e temos que (S, H) é α-esparso. Além disso, (R_1, H) e (R_2, H) são γ-seguros. Temos que (R_1, H) não é γ-articulado pois (T, H) não é seguro com $T = \{z_1, z_4, z_7, z_8\}$.* □

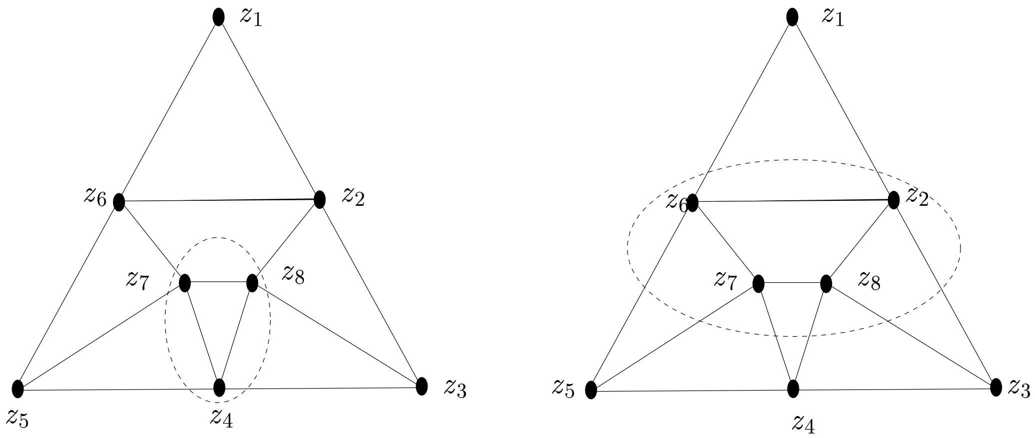

Figura 1. Grafos enraizados (R_1, H) e (R_2, H).

Seja (R, H) um grafo enraizado, G um grafo e $f\colon R \to V(G)$ uma função injetora. Dizemos que a função $g\colon V(H) \to V(G)$ é uma *R-extensão* de f se para todo $x \in R$ tivermos que $g(x) = f(x)$. Ainda, dizemos que uma função $g'\colon V(H) \to V(G)$ é uma *(R, H)-extensão* de f se:

1. g' for uma R-extensão e
2. $\{x, y\} \in E(H)$, $y \notin R \to \{g'(x), g'(y)\} \in E(G)$.

Podemos ver um exemplo de g' ser uma (R, H) extensão de f na Figura 2.

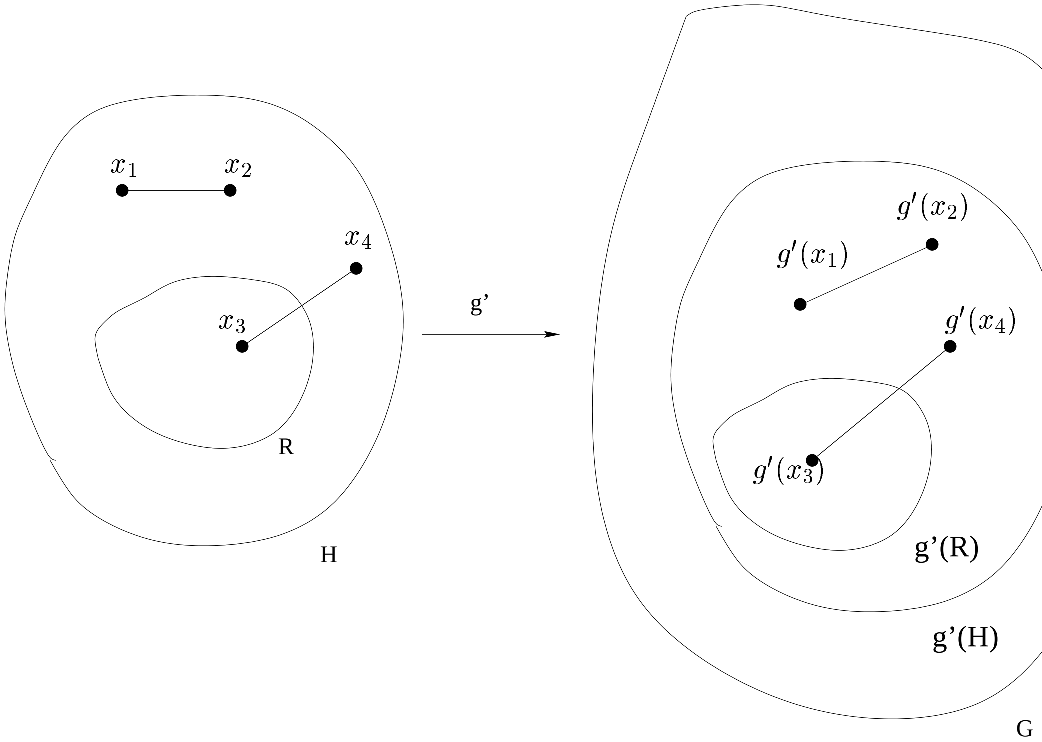

FIGURA 2. Uma (R, H)-extensão g'.

OBSERVAÇÕES 1.2. *Cabem algumas observações e convenções:*

1. *Se para todo $x \in R$ tivermos que $g'(x) = g(x)$ dizemos simplesmente que g' é extensão de g;*
2. *Se estiver claro pelo contexto diremos que g e g' são respectivamente R-extensão e (R, H)-extensão ao invés de, respectivamente, R-extensão de f e (R, H)-extensão de f;*
3. *Dizemos que g' está contida em $B \subseteq V(G)$ ou, equivalentemente, que B contém g' se $g'(V(H) - R) \subseteq B$;*
4. *Denotamos por $N(f, R, H)$ o número de (R, H)-extensões g';*
5. *Duas (R, H)-extensões g_1 e g_2 são ditas disjuntas se*

$$g_1(H - R) \cap g_2(H - R) = \emptyset.$$

$\square$

EXEMPLO 1.3 ((R, H)-extensões). *Consideremos o grafo G da Figura 3 e a seguinte função injetora f definida por:*

$$z_6 \mapsto w_1$$
$$z_2 \mapsto w_2$$
$$z_7 \mapsto w_4$$
$$z_8 \mapsto w_3$$

e consideremos também a seguinte função g' definida a seguir:

$$z_1 \mapsto w_8$$
$$z_2 \mapsto w_2$$
$$z_3 \mapsto w_7$$
$$z_4 \mapsto w_6$$
$$z_5 \mapsto w_5$$
$$z_6 \mapsto w_1$$
$$z_7 \mapsto w_4$$
$$z_8 \mapsto w_3$$

Temos que g' é uma (R_2, H)-extensão de f com (R_2, H) do Exemplo 1.

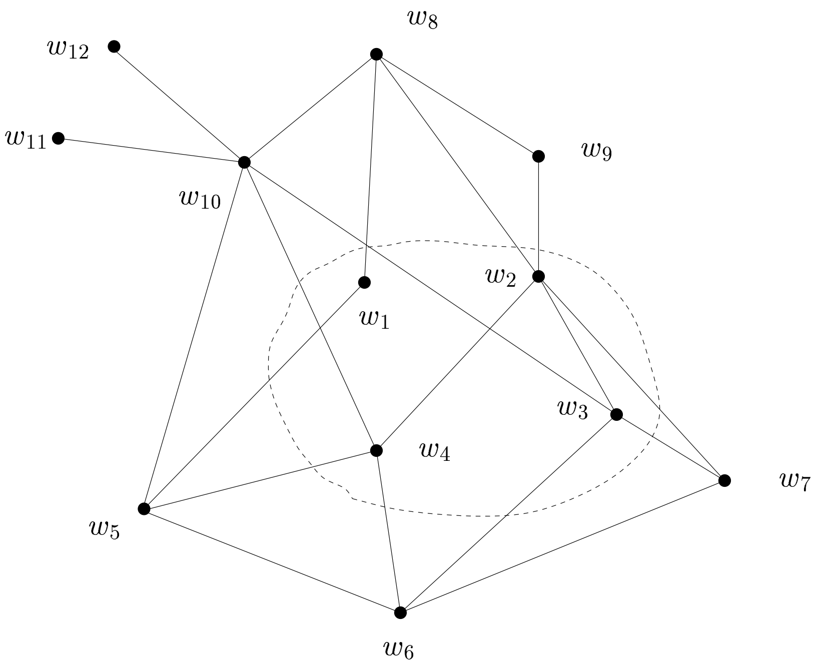

FIGURA 3. Grafo G.

□

Seja G um grafo e $X = \{X_1, \ldots, X_r\}$ um conjunto de vértices de G. O (t, α)-*fecho* de X, denotado por $\text{cl}_{t,\alpha}(X)$ é a união de todas as imagens $g'(H)$ com

1. (R, H) um grafo enraizado α-rígido tal que

$$V(H) = \{P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_v\}$$

com $v \leq t$;

2. g' uma (R, H)-extensão da R-extensão g definida por $g(P_i) = x_i$.

Quando não houver tais funções g' ou quando $t = 0$ então definimos $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)$ como sendo X.

Sejam $A = \{X_1, \ldots, X_r\}$ e $B = \{X_1', \ldots, X_r'\}$. Dizemos que A é (t, α)-*equivalente a* B se os subgrafos induzidos por $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(A)$ e $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(B)$ forem isomorfos. Denotamos este fato por

$$(X_1, \ldots, X_r) \equiv_{t,\alpha} (X_1', \ldots, X_r')$$

e se α estiver claro pelo contexto, escrevemos

$$(X_1, \ldots, X_r) \equiv_t (X_1', \ldots, X_r').$$

OBSERVAÇÕES 1.4. *As definições relativas a grafos enraizados se aplicam também quando o conjunto de raízes é vazio. Devemos ressaltar que*

1. *Em* $(\emptyset, H)$ *com tipo* (v, e), v *e* e *são, respectivamente, a quantidade de vértices e de arestas do grafo* H;
2. *Dado um grafo enraizado* (R, H), *uma* (R, H)*-extensão com* R *vazio é uma função* $h : V(H) \to G$ *que leva arestas do grafo* H *em arestas do grafo* G. *Em outras palavras, leva o grafo* H *em uma cópia sua em* G;
3. *O* t, α*-fecho do conjunto vazio, denotado por* $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(\emptyset)$ *é a união de cópias de grafos* H *com* $(\emptyset, H)$ *rígido. Quando não houver tais grafos, temos que* $\mathrm{cl}_t(\emptyset) = \emptyset$;
4. *Dados grafos* G_1 *e* G_2, *dizemos que* $\emptyset \equiv_t \emptyset$ *se os grafos* $\mathrm{cl}_t(\emptyset)$ *respectivamente, em* G_1 *e em* G_2 *forem isomorfos;*
5. *Ainda considerando os grafos* G_1 *e* G_2 *do item anterior, temos*

$$(x_1, \ldots, x_t) \equiv_0 (y_1, \ldots, y_t)$$

se e somente se para todo i *e* j *com* $1 \leq i < j \leq t$ *tivermos que*

$$\{x_i, x_j\} \in E(G_1) \leftrightarrow \{y_i, y_j\} \in E(G_2).$$

1.2. Vocabulários e estruturas

Os pré-requisitos de lógica da nossa dissertação são mais especificamente resultados de teoria dos modelos finitos e uma referência é [**5**] de Ebbinghaus e Flum.

Um *vocabulário* τ é um conjunto não vazio que consiste de símbolos de relação P, Q, R, $\ldots$ e de símbolos de constantes c, d, $\ldots$. Todo símbolo de relação está equipado com um número natural, sua *aridade*. Dizemos que um vocabulário é *relacional* se não contiver constantes. Uma *estrutura* $\mathcal{A}$ de um vocabulário τ, ou simplesmente uma τ-estrutura $\mathcal{A}$, consiste de:

1. um conjunto não-vazio A, o domínio de $\mathcal{A}$;
2. uma relação n-ária R^A em A para todo símbolo de relação n-ária R em τ;
3. um elemento c^A de A para todo o símbolo de constante c em τ.

Podemos definir objetos matemáticos familiares em termos de estruturas. Vejamos dois exemplos:

EXEMPLO 1.5 (Grafos). Seja $\tau = \{E\}$ com apenas um símbolo E de relação binária. Um grafo é uma τ-estrutura $\mathcal{G} = \{G, E^G\}$ que satisfaz:

1. para todo $a \in G$ não temos que $E^G(a, a)$.
2. para todo par $a, b \in G$, se $E^G(a, b)$ então $E^G(b, a)$.

Observemos que o símbolo de relação binária E faz a tarefa de caracterizar as arestas de um grafo. Notemos que o vocabulário para grafos é relacional. $\square$

EXEMPLO 1.6 (Ordens parciais). Seja $\tau = \{\leq\}$ com apenas um símbolo $\leq$ de relação binária. Uma ordem parcial é uma τ-estrutura $\mathcal{A} = (A, \leq^A)$ que satisfaz:

1. para todo $a \in A$ temos que $a \leq^A a$;
2. para todo par $a, b \in A$,temos que $a \leq^A b$ ou $b <^A a$;
3. para a, b, $c \in A$, se $a <\leq^A b$ e $b \leq^A c$ então $a \leq^A c$. $\square$

1.3. Teoria de primeira ordem dos grafos - FOTOG

Fixemos um vocabulário τ. Cada *fórmula* de uma *lógica de primeira ordem* é uma seqüência de símbolos escritos através do seguinte *alfabeto*:

- variáveis: $x, y, z, \ldots$ com ou sem índices;
- os conectivos $\neg$ e $\vee$;
- o quantificador $\exists$;
- o sinal de igualdade $=$;
-) e (;
- os símbolos de τ.

Um *termo* do vocabulário τ é uma variável ou uma constante em τ. Utilizaremos letras t, t_1, t_2, $\ldots$ para representarmos termos. Uma *fórmula* da lógica de primeira ordem de vocabulário τ são as seqüências obtidas através de aplicações finitas das seguintes regras:

1. Se t_0 e t_1 forem termos então $t_0 = t_1$ é uma fórmula;
2. Se R for símbolo de relação n-ária de τ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos então $R(t_1, \ldots, t_n)$ é fórmula;
3. Se ϕ for fórmula então $\neg\phi$ é fórmula;
4. Se ϕ for ψ são fórmulas então $\phi \vee \psi$ é fórmula;
5. Se ϕ for fórmula e x uma variável então $\exists x \phi$ é fórmula.

Chamamos as fórmulas obtidas por (1) e (2) de *atômicas*. Para fórmulas ϕ e ψ escrevemos $\phi \wedge \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ e $\forall x \phi$ como abreviaturas de, respectivamente, $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $\neg\phi \vee \psi$, $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi)$ e $\neg\exists x \neg\phi$. Chamamos de *sentenças* as fórmulas nas quais toda variável em uma subfórmula atômica está no escopo de um quantificador. Quando uma variável não está no escopo de um quantificador dizemos que esta variável é *livre*. Chamemos de livre(ϕ) o conjunto das variáveis livres de uma dada fórmula ϕ.

Trabalhamos, no presente texto, com a *teoria de primeira ordem dos grafos* que representaremos por FOTOG daqui em diante. As variáveis em FOTOG representam os vértices de um grafo, e o único símbolo de relação é o que representa adjacência (conforme o Exemplo 1.5). Além disso, os axiomas de FOTOG são:

1. $\forall x \neg(x \sim x)$;
2. $\forall x \forall y (x \sim y) \leftrightarrow (y \sim x)$.

Utilizando FOTOG, podemos expressar, por exemplo, as seguintes propriedades de grafos:

1. O grafo contém um K^3:
   $$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge (x \sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (x \sim z));$$
2. Não existe ponto isolado: $\forall x \exists y (x \sim y)$;
3. Todo par de vértices distintos possui vizinho em comum:
   $\forall x \forall y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge (x \sim z) \wedge (y \sim z))$.

Contudo, não podemos expressar outras propriedades em FOTOG e dentre elas podemos citar a propriedade de um grafo ser, por exemplo, bipartido, hamiltoniano ou euleriano.

Observação 1.7 (Notação para fórmulas em FOTOG). *Será comum ao longo do presente texto utilizarmos a notação $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas e livre$(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, ou seja, não é necessário que todas as $x_1, \ldots, x_n$ sejam variáveis livres. Freqüentemente abreviaremos uma n-upla $x_1, \ldots, x_n$ de variáveis por $\overline{x}$, por exemplo, escrevendo $\phi(\overline{x})$ ao invés de $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.*

1.4. Satisfatibilidade

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura. Uma *valoração* em $\mathcal{A}$ é uma função α com domínio no conjunto de termos tal que a imagem de variáveis são elementos de A e a imagem de constantes de τ são as constantes de $\mathcal{A}$. Denotemos por $\alpha\frac{a}{x}$ a valoração que concorda com α exceto que $\alpha(x) = a$, $a \in A$.

Definimos a relação

$$\mathcal{A} \models \phi[\alpha]$$

que significa que a valoração α satisfaz a fórmula ϕ em $\mathcal{A}$ ou que ϕ é verdadeira em $\mathcal{A}$ através de α como segue:

1. $\mathcal{A} \models t_1 = t_2[\alpha]$ sse $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$;
2. $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\alpha]$ sse $R^{\mathcal{A}}(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n))$;
3. $\mathcal{A} \models \neg\phi[\alpha]$ sse não se dá que $\mathcal{A} \models \phi[\alpha]$;
4. $\mathcal{A} \models (\phi \vee \psi)[\alpha]$ sse $\mathcal{A} \models \phi[\alpha]$ ou $\mathcal{A} \models \psi[\alpha]$;
5. $\mathcal{A} \models \exists x \phi[\alpha]$ sse existe um $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \phi[\alpha\frac{a}{x}]$.

Exemplo 1.8. A seguinte sentença expressa que vértices x, y e z de um grafo formam um triângulo:

$$\phi(x, y, z) \equiv \exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge (x \sim y) \wedge (y \sim z) \wedge (x \sim z))$$

e seja também o grafo G da Figura 3. Temos que

$$G \models \phi(x, y, z)$$

com a valoração $\alpha\frac{w_2}{x}\frac{w_8}{y}\frac{w_9}{z}$.

□

OBSERVAÇÃO 1.9. *Consideremos uma estrutura $\mathcal{A}$. Se tivermos uma fórmula $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ e uma valoração α tal que*

$$a_1 = \alpha(x_1), \ldots, a_n = \alpha(x_n)$$

podemos escrever $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ ou, mais simplesmente, $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$ ao invés de $\mathcal{A} \models \phi[\alpha]$.

1.5. Isomorfismos parciais e m-equivalência

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas τ-estruturas. Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *isomorfas*, denotando este fato por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, se existir um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, ou seja, uma função bijetora $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que

1. para toda constante $c \in \tau$ temos que $\pi(c^A) = c^B$ e
2. para todo símbolo de relação n-ária $R \in \tau$ e para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, temos que $R^A(a_1, \ldots, a_n)$ se e somente se $R^A(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$.

EXEMPLO 1.10 (Estruturas isomorfas). *Consideremos dois grafos G e H conforme a Figura 4. consideremos a função com domínio em $V(G)$ e contradomínio $V(H)$ dada por $f(x_i) = y_{i+1}$ com $i + 1$ sendo a adição módulo 8. Temos que f é um isomorfismo e,portanto, temos que G e H são isomorfos.* □

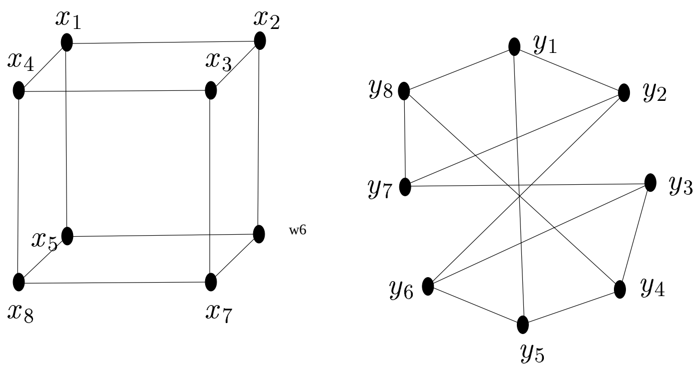

FIGURA 4. Isomorfismo de estruturas: grafos

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas τ-estruturas. Seja p uma aplicação tal que o $\mathrm{Dom}_f \subseteq A$ e $\mathrm{Im}_f \subseteq B$ onde A e B são os domínios de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Então chamamos p de um *isomorfismo parcial* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ se:

1. p é injetora;

2. para toda constante $c \in \tau$ temos que $c^A \in \mathrm{Dom}_p$ e $p(c^A) = c^B$;
3. para todo símbolo de relação n-ária $R\mathrm{Im}\tau$ e para todo $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{Dom}_p$ temos que $R^A(a_1 \dots a_n)$ se e somente se $R^A(p(a_1) \dots p(a_n))$.

Suponhamos que p nas condições descritas acima é tal que $\mathrm{Dom}_p = \{a_1, \dots, a_s\}$, $\mathrm{Im}_f = \{b_1, \dots, b_s\}$ e, além disso, $p(a_i) = b_i$ para $i \in \{1, \dots, s\}$ e $p(c^A) = c^B$ para todo $c \in \tau$. Podemos denotar o isomorfismo parcial p por $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ com $\overline{a} = (a_1, \dots, a_s)$ e $\overline{b} = (b_1, \dots, b_s)$. Denotamos por $\mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ o conjunto dos isomorfismos parciais entre as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Observação 1.11. *A aplicação vazia, $p = \emptyset$ é um isomorfismo parcial de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ desde que o vocabulário em questão não contenha constantes.* □

Exemplo 1.12 (Isomorfismo Parcial). *Consideremos a relação de divisibilidade, que é uma ordem, nos respectivos conjuntos de inteiros (Figura 5). Temos que* $(1, 2, 5, 10) \mapsto (2, 40, 20, 80)$. □

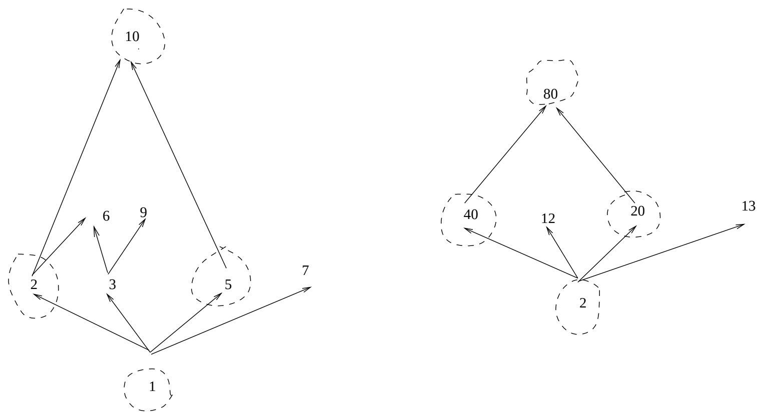

Figura 5. Isomorfismo parcial

Consideremos uma fórmula ϕ. Definimos o *posto de quantificadores* de ϕ, denotado por $\mathrm{qr}(\phi)$, como sendo o número máximo de quantificadores aninhados que ocorrem em ϕ. Mais formalmente:

1. $\mathrm{qr}(\phi) := 0$ se ϕ for atômica;
2. $\mathrm{qr}(\neg\phi) := qr(\phi)$;
3. $\mathrm{qr}(\phi \vee \psi) := \max\{qr(\phi), qr(\psi)\}$;
4. $\mathrm{qr}(\exists x \phi) := \mathrm{qr}(\phi) + 1$;

Seja m um natural e sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *m-equivalente* a $\mathcal{B}$ se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as mesmas sentenças de primeira ordem de posto de quantificadores menor ou igual a m. A notação para este fato é $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

1.6. O Jogo de Ehrenfeucht

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas τ-estruturas, $\overline{a} \in A^s$, $\overline{b} \in B^s$ e m um natural. O *Jogo de Ehrenfeucht* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ consiste de dois participantes, o *Spoiler* e o *Duplicator*, e tem m *lances*. Cada lance consiste de duas *jogadas*. Em cada lance, o Spoiler é sempre o primeiro a efetuar jogada. Uma jogada consiste de escolher uma das estruturas, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, e a seguir, escolher um elemento de, respectivamente, A ou B. Se no i-ésimo lance, o Spoiler escolher e_i em A, o Duplicator tem que escolher um elemento f_i em B. Se o Spoiler escolher um elemento f_i em B, resta ao Duplicator escolher um e_i em A. Suponhamos que ao final dos m lances, $e_1, \ldots, e_m$ e $f_1, \ldots, f_m$ tenham sido escolhidos em A e em B respectivamente. Dizemos que o Duplicator *vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ se e somente se

$$\overline{a}, e_1, \ldots, e_m \mapsto \overline{b}, f_1, \ldots, f_m$$

for um isomorfismo parcial de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Caso contrário, o Spoiler vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Dizemos que um jogador tem uma *estratégia vitoriosa* no jogo $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ se para qualquer escolha que o oponente faça, ele consegue responder com escolhas tais que, ao final de m lances, temos um isomorfismo parcial como o descrito acima. Omitimos uma definição formal de estratégia vitoriosa: ela estará implícita em resultados que veremos adiante.

Observações 1.13. *Podemos fazer as seguintes observações a respeito do jogo de Ehrenfeucht:*

1. *Quando um jogador, seja ele o Spoiler ou Duplicator, tem uma estratégia vitoriosa para* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *dizemos, por abuso de linguagem, simplesmente que ele vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$*;*
2. *Podemos dizer que o Spoiler vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *se após i lances,* $1 \leq i \leq m$, $\overline{a}, e_1, \ldots, e_m \mapsto \overline{b}, f_1, \ldots, f_m$ *não for isomorfismo parcial.*
3. *Se m for zero, ou seja, se tivermos um jogo com zero lances, pedimos apenas que* $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ *seja um isomorfismo parcial para que o Duplicator vença* $\mathrm{EHR}_0(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$*. Se s for zero, denotamos o jogo por* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *e o Duplicator vence o jogo se*

   $$e_1, \ldots, e_m \mapsto f_1, \ldots, f_m$$

   for isomorfismo parcial. No caso de ambos m e s serem zero, o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *pela Observação 1.11.*
4. *O Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *se e somente se o Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_k(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *para todo k,* $1 \leq k \leq m$.
5. *O Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *se e somente se para cada k,* $1 \leq k \leq m$, *o Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_k(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ *e a seguir vence* $\mathrm{EHR}_{m-k}(\mathcal{A}, \overline{a}, \overline{x}, \mathcal{B}, \overline{b}, \overline{y})$ *para algum* $\overline{x} \in A^k$ *e algum* $\overline{y} \in B^k$. □

As estruturas abordadas no nosso texto são os grafos. Vejamos o seguinte exemplo:

EXEMPLO 1.14 (Jogo de Ehrenfeucht em grafos). Quando as estruturas envolvidas em um jogo de Ehrenfeucht são dois grafos G e H, por exemplo, o Spoiler e o Duplicator se alteram na escolha de vértices de G e de H. Consideremos os grafos G e H da Figura 6.

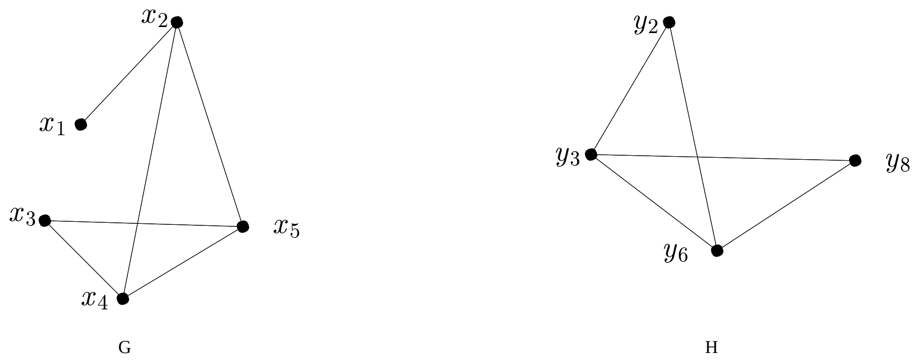

FIGURA 6. Jogo de Ehrenfeucht em grafos

Agora, consideremos $\mathrm{EHR}_2(G, \overline{a}, H, \overline{b})$ com $\overline{a} = x_5$ e $\overline{b} = y_8$ com as seguintes escolhas dos jogadores:

1. Spoiler escolhe $x_3 \in G$; Duplicator escolhe $y_3 \in H$;
2. Spoiler escolhe $y_6 \in H$; Duplicator escolhe $x_4 \in G$;
3. Spoiler escolhe $x_5 \in G$; Duplicator escolhe $y_8 \in H$.

Se enxergarmos um grafo G como uma estrutura, o conjunto formado pelos vértices de G constitui o domínio da estrutura e as arestas de G são caracterizadas pela "relação de adjacência" E vista no Exemplo 1.5. Notemos também que um grafo do ponto de vista de estrutura tem um vocabulário relacional.

No nosso exemplo, temos o seguinte isomorfismo parcial:

$$x_5, x_3, x_4 \mapsto y_8, y_3, y_6$$

portanto o Duplicator vence o jogo. $\square$

Podemos expressar a vitória do Duplicator em jogos de Ehrenfeucht entre grafos utilizando uma linguagem mais simples. Consideremos G e H dois grafos e seja $\mathrm{EHR}_t(G, H)$. O Duplicator vence $\mathrm{EHR}_t(G, H)$ se e somente se para todo para i, j com $1 \leq i < j \leq t$ tivermos que

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \leftrightarrow \{y_i, y_j\} \in E(H)$$

tal que $x_1, \ldots, x_t$ e $y_1, \ldots, y_t$ são os vértices escolhidos em G e em H, respectivamente. Essa condição é, em outras palavras, o mesmo que

$$(x_1, \ldots, x_t) \equiv_0 (y_1, \ldots, y_t).$$

1.7. Funções limiares e leis zero-um

Consideremos duas funções f e g com domínios no conjunto dos naturais e contradomínio no conjunto dos reais. Dizemos que f é muito menor que g e denotamos este fato por

$$f \ll g$$

quando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

e dizemos que f é muito maior que g denotando este fato por

$$f \gg g$$

se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Uma função $r = r(n)$ é chamada de função limiar para uma propriedade de grafos A (expressa em FOTOG ou em outras linguagens) se

1. Quando $p(n) \ll r(n)$, $\lim_{n\to\infty} Pr(G_{n,p}$ tem $A) = 0$;
2. Quando $p(n) \gg r(n)$, $\lim_{n\to\infty} Pr(G_{n,p}$ tem $A) = 1$; ou vice-versa.

Consideremos uma função $p(n)$ com domínio no conjunto dos naturais e contradomínio $(0,1)$. Dizemos que $p(n)$ satisfaz a lei zero-um em FOTOG se, e somente se, para todas as propriedades A de grafos expressas em FOTOG tivermos que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(G_{n,p(n)} \models \mathrm{A}) = 0 \text{ ou } 1.$$

CAPíTULO 2

O Teorema de Ehrenfeucht

Dedicamos este capítulo à apresentação do Teorema de Ehrenfeucht em sua forma original para estruturas. Dividimos este capítulo da seguinte maneira: na seção 2.1 destacamos dois resultados básicos sobre o Jogo de Ehrenfeucht; na seção 2.2 apresentamos as fórmulas de m-Hintikka bem como alguns resultados correlatos. Estas fórmulas nos auxiliam na prova do Teorema de Ehrenfeucht na seção 2.3. O Teorema de Ehrenfeucht tem o seguinte enunciado:

TEOREMA 2.1 (Teorema de Ehrenfeucht). *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas, $\overline{a} \in A^s$, $\overline{b} \in B^s$ e seja m um natural. As seguintes asserções são equivalentes:*

1. *O Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$*;*
2. $\mathcal{B} \models \phi_{\overline{a}}^m[\overline{b}]$*;*
3. $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$*.*

A fórmula $\phi_{\overline{a}}^m$ na asserção (2) é a *fórmula de m-Hintikka* de $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ a qual definimos posteriormente.

Em termos gerais, este resultado, através da equivalência das asserções (1) e (3), relaciona a vitória do Duplicator em um jogo de Ehrenfeucht com o fato de duas estruturas satisfazerem uma mesma subclasse de fórmulas.

Embora aparentemente sem direta utilidade, a afirmação (2) é essencial para estabelecer a equivalência entre as afirmações (1) e (3). A fórmula $\phi_{\overline{a}}^m$ é a *fórmula de m-Hintikka* de $\overline{a}$ em $\mathcal{A}$ e descreve as propriedades de $\overline{a}$ em qualquer jogo do tipo $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \dots)$. Mais precisamente, para qualquer $\mathcal{B}$ e $\overline{b} = b_1, \dots, b_s \in B$,

$$\mathcal{B} \models \phi_{\overline{a}}^m[\overline{b}] \text{ se e somente se o Duplicator vence } \mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b}),$$

ou seja, a implicação de (1) em (2) do Teorema de Ehrenfeucht. Passemos à seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.2 (*Fórmula de m-Hintikka*). *Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura e $\overline{v} = (v_1, \dots, v_s)$. Definimos*

$$\phi_{\overline{a}}^0(\overline{v}) := \bigwedge \{\phi_i(\overline{v}) : \mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]\}$$

com cada ϕ_i, $1 \leq i \leq k$, atômica ou atômica negada e para $m > 0$,

$$\phi_{\overline{a}}^m(\overline{v}) := \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \phi_{\overline{a}a}^{m-1}(\overline{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \phi_{\overline{a}a}^{m-1}(\overline{v}, v_{s+1}).$$

$\square$

Observação 2.3. *Se a estrutura $\mathcal{A}$ não estiver clara no contexto, usaremos a notação $\phi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ ao invés de $\phi^m_{\overline{a}}$. Se s for zero, usaremos a notação $\phi^m_{\mathcal{A}}$ ao invés de $\phi^m_{\mathcal{A},\emptyset}$.* □

Dividimos este capítulo em três seções: na seção 2.1 destacamos dois resultados básicos sobre o Jogo de Ehrenfeucht; na seção 2.2 apresentamos alguns resultados relacionados com as fórmulas de m-Hintikka que nos auxiliam na prova do Teorema de Ehrenfeucht na seção 2.3.

2.1. Fatos básicos sobre o Jogo de Ehrenfeucht

Lema 2.4. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas e m um natural. Se $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ então o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$.*

Prova. Suponhamos que ψ é o isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Uma estratégia para o Duplicator vencer o jogo é sempre escolher a imagem ou a imagem inversa de ψ dependendo da escolha do Spoiler. Em outras palavras, se o Spoiler escolher $a \in \mathcal{A}$ então o Duplicator tem que escolher $b = \psi(a) \in B$. Caso o Spoiler escolha $b \in B$ então o Duplicator tem que escolher $a = \psi^{-1}(b) \in A$. Sejam $\overline{e}$ e $\overline{f}$ as duas m-uplas de elementos escolhidos em A e B, respectivamente. Temos que $\overline{e} \mapsto \overline{f}$ é um isomorfismo parcial, pois é exatamente um a restrição de ψ. □

Lema 2.5. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas, $\overline{a} \in A^s$, $\overline{b} \in B^s$ e m um natural positivo. As duas sentenças a seguir são equivalentes:*

1. *O Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A},\overline{a},\mathcal{B},\overline{b})$;*
2. *Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}a,\mathcal{B},\overline{b}b)$ e para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}a,\mathcal{B},\overline{b}b)$.*

Prova. O Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A},\overline{a},\mathcal{B},\overline{b})$

se e somente se

- o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_1(\mathcal{A},\overline{a},\mathcal{B},\overline{b})$ e a seguir
- o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}x,\mathcal{B},\overline{b}y)$ para algum $x \in A$ e $y \in B$ (pela observação 1.13 tomando $k = 1$)

se e somente se

- se o Spoiler escolher $a \in A$, o Duplicator consegue escolher $b \in B$ tal que $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b$ seja isomorfismo parcial. Raciocínio análogo se o Spoiler escolher $b \in B$. Em seguida,
- tomando $x = a$ e $y = b$, o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}a,\mathcal{B},\overline{b}b)$

se e somente se

para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}a,\mathcal{B},\overline{b}b)$
e para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A},\overline{a}a,\mathcal{B},\overline{b}b)$.
□

2.2. Resultados sobre fórmulas de m-Hintikka

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas estruturas, $\overline{a} \in A^s$ e $\overline{b} \in B^s$. Consideremos também um natural m. As fórmulas de m-Hintikka $\phi_{\overline{a}}^m$ tem posto de quantificadores m. Além disso, $\mathcal{A}$ satisfaz $\phi_{\overline{a}}^m[\overline{a}]$. Essas propriedades das fórmulas de m-Hintikka são cruciais na prova do Teorema de Ehrenfeucht.

Lema 2.6. *Para s, m naturais, o conjunto*

$$\{\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}^m \text{ tal que } \mathcal{A} \text{ é estrutura e } \overline{a} \in A^s\}$$

é finito.

Prova. Fixemos naturais s e m. Então temos uma quantidade finita de vetores $\overline{a}$. Para cada vetor $\overline{a}$ temos m fórmulas de m-Hintikka, a saber: $\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}^0$, $\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}^1$, $\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}^2$, $\ldots$, $\phi_{\mathcal{A},\overline{a}}^m$. □

O seguinte resultado nos proporciona uma informação importante.

Lema 2.7. *Sejam $\mathcal{A}$ estrutura, $\overline{a} \in A^s$ e m um natural. Temos que $\mathrm{qr}(\phi_{\overline{a}}^m) = m$.*

Prova. Utilizamos indução em m.

Caso 1: Verifiquemos para $m = 0$. Em $\phi_{\overline{a}}^0$ não temos nenhum quantificador, já que $\phi_{\overline{a}}^0$ é a disjunção de fórmulas atômicas ou atômicas negativas. Portanto, $\mathrm{qr}(\phi_{\overline{a}}^0) = 0$.

Caso 2: Verifiquemos para $m > 0$. Temos que

$$\mathrm{qr}(\phi_{\overline{a}}^m) = \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \phi_{\overline{a}a}^{m-1}(\overline{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \phi_{\overline{a}a}^{m-1}(\overline{v}, v_{s+1})$$

e, por hipótese de indução, $\mathrm{qr}(\phi_{\overline{a}a}^{m-1}(\overline{v}, v_{s+1})) = m - 1$. Temos que

$$\mathrm{qr}(\exists v_{s+1} \phi_{\overline{a}a}^m(\overline{v}, v_{s+1})) = m$$

e

$$\mathrm{qr}(\forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \phi_{\overline{a}a}^m(\overline{v}, v_{s+1})) = m$$

e portanto temos que $\mathrm{qr}(\phi_{\overline{a}}^m) = m$. □

O próximo resultado já nos traz alguma informação quanto a satisfatibilidade das fórmulas de m-Hintikka.

Lema 2.8. *Sejam $\mathcal{A}$ estrutura, $\overline{a} \in A^s$ e m um natural. Então*

$$\mathcal{A} \models \phi_{\overline{a}}^m[\overline{a}].$$

Prova. Utilizamos indução em m.

Caso 1: Verifiquemos para $m = 0$. Temos que

$$\phi_{\overline{a}}^0(\overline{v}) := \phi_1(\overline{v}) \wedge \ldots \wedge \phi_k(\overline{v})$$

com cada ϕ_i, $1 \leq i \leq k$, atômica ou atômica negativa e além disso com $\mathcal{A} \models \phi_i[\overline{a}]$ pela Definição 2.2. Se para cada ϕ_i, $\mathcal{A} \models \phi_i$ então temos que

$$\mathcal{A} \models \phi_1(\overline{a}) \wedge \ldots \wedge \phi_k(\overline{a})$$

e, portanto, $\mathcal{A} \models \phi^0_{\overline{a}}(\overline{a})$

Caso 2: Verifiquemos para $m > 0$. Temos que

$$\phi^m_{\overline{a}}(\overline{v}) = \bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1}).$$

Por hipótese de indução, temos que $\mathcal{A} \models \phi^{m-1}_{\overline{a},a}[\overline{a}, a]$ e então

$$\mathcal{A} \models \textstyle\bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1}) \text{ e}$$
$$\mathcal{A} \models \forall v_{s+1} \textstyle\bigvee_{a \in A} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1})$$

Portanto, $\mathcal{A} \models \phi^m_{\overline{a}}[\overline{a}]$. □

Discutimos até aqui apenas sobre o posto de quantificadores de $\phi^m_{\overline{a}}$ e sobre sua satisfatibilidade em $\mathcal{A}$. O seguinte resultado é o primeiro a fazer conexão entre as estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ através de isomorfismos parciais.

Lema 2.9. *Sejam $\mathcal{A}$ estrutura, $\overline{a} \in A^s$ e m um natural. Então para qualquer $\mathcal{B}$ e $\overline{b} \in B$,*

$$\mathcal{B} \models \phi^0_{\overline{a}}[\overline{b}] \textit{ se e somente se } \overline{a} \mapsto \overline{b} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Prova. Seja $\overline{b} = (v_1, \ldots, v_s)$. Temos que

$$\phi^0_{\overline{a}}(\overline{v}) := \phi_1(\overline{v}) \wedge \ldots \wedge \phi_k(\overline{v})$$

com cada ϕ_i, $1 \leq i \leq k$, atômica ou atômica negada e, além disso, $\mathcal{A} \models \phi_i[\overline{a}]$ pela Definição 2.2. Temos que $\mathcal{B} \models \phi^0_{\overline{b}}$ se, e somente se, $\mathcal{B} \models \phi_i[\overline{b}]$, $1 \leq i \leq k$, se, e somente se, $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ é isomorfismo parcial. □

2.3. A prova

Prova do Teorema 2.1 (Ehrenfeucht). Os lemas apresentados nas seções anteriores já nos permitem passar à prova do Teorema de Ehrenfeucht. Provemos a implicação de (3) em (2). Por hipótese, sabemos que $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, ou seja, se $\phi(x_1, \ldots, x_s)$ for uma fórmula de posto de quantificadores $\leq m$ então

$$\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}] \leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi[\overline{b}].$$

Sabemos que $\mathrm{qr}(\phi^m_{\overline{a}}) = m$ pelo Lema 2.7 e que $\mathcal{A} \models \phi^m_{\overline{a}}[\overline{a}]$ pelo Lema 2.8. Portanto, $\mathcal{B} \models \phi^m_{\overline{a}}[\overline{b}]$.

Temos que (3) implica em (2) pois $\mathrm{qr}(\phi^m_{\overline{a}}) = m$ e $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$ e, portanto, $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}]$.

Provemos a implicação de (1) em (3). Utilizamos indução em m.

Caso 1: Verifiquemos para $m = 0$. Consideremos que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_0(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$. Isto significa que $p\colon \overline{a} \mapsto \overline{b}$ é um isomorfismo parcial. Além disso, suponhamos que para $\phi(x_1, \ldots, x_s)$ com $\mathrm{qr}(\phi) \leq 0$ temos que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$. Chamemos a função de valoração associada ao vetor $\overline{a}$ e $\overline{b}$, respectivamente, de α e β. Como $\mathrm{qr}(\phi) \leq 0$, temos que ϕ é atômica ou uma combinação booleana de fórmulas atômicas.

Suponhamos inicialmente que ϕ seja uma fórmula atômica. Então ϕ pode ser de uma das duas formas:

1. $t_0 = t_1$ com t_0 e t_1 termos: como $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$ temos que $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$. Temos que $\beta(t_0) = p(\alpha(t_0))$ e $\beta(t_1) = p(\alpha(t_1))$ daí $\beta(t_0) = \beta(t_1)$ e, portanto, $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}]$.
2. $R(t_1, \ldots, t_s)$ com R um símbolo de relação s-ária de τ e $t_1, \ldots, t_s$ termos: como $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$ temos que $R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_s)$. Como p é isomorfismo parcial temos que
$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_s) \leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_s))$$
mas $R^{\mathcal{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_s)) = R^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_s)$ e, portanto, $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}]$.

Se ϕ não for uma fórmula atômica, só resta a ϕ ser uma combinação booleana de fórmulas atômicas. Uma indução na complexidade de ϕ nos dá também que $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}]$.

Caso 2: Verifiquemos para $m > 0$. Suponhamos que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$. Além disso, podemos supor que $\phi(\overline{x}) = \exists y \psi(\overline{x}, y)$ e $qr(\phi) \leq m$. Vamos também assumir que $\mathcal{A} \models \phi[\overline{a}]$. Então existe $a \in A$ tal que $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}, a]$. Como o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ então pelo Lema 2.5 existe $b \in B$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}a, \mathcal{B}, \overline{b}b)$. Já que $\mathrm{qr}(\psi) \leq m-1$, a hipótese de indução nos dá que $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}b]$ e, portanto, $\mathcal{B} \models \phi[\overline{b}]$.

Provemos a equivalência de (1) e (2) utilizando indução em m. Para $m = 0$ temos que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_0(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ se e somente se $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (conforme a Observação 1.13) se e somente se $\mathcal{B} \models \phi^0_{\overline{a}}[\overline{b}]$ (conforme o Lema 2.9).

Para $m > 0$, o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$

se e somente se

para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}a, \mathcal{B}, \overline{b}b)$ e para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_{m-1}(\mathcal{A}, \overline{a}a, \mathcal{B}, \overline{b}b)$ (conforme o Lema 2.5)

se e somente se

para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $\mathcal{B} \models \phi^{m-1}_{\overline{a}a}[\overline{b}b]$ e para todo $b \in B$ existe $a \in A$ com $\mathcal{B} \models \phi^{m-1}_{\overline{a}a}[\overline{b}b]$ (hipótese de indução)

se e somente se

$$\bigwedge_{a \in A} \exists v_{s+1} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a \in A} \phi^{m-1}_{\overline{a}a}(\overline{v}, v_{s+1})$$

se e somente se

$$\mathcal{B} \models \phi^m_{\overline{a}}(v_1, \ldots, v_s).$$

□

O Teorema de Ehrenfeucht é apenas um dos resultados para caracterizar m-equivalência entre duas estruturas. Outros resultados sobre m-equivalência são o Teorema de Fraïsse e o Teorema de Hanf e uma referência é [**5**].

Como já dissemos anteriormente, as estruturas abordadas no presente trabalho são os grafos. Sejam $G = G_{n,p(n)}$ e $H = H_{n,p(n)}$ em conjuntos de vértices disjuntos. Seja também um natural m e consideremos o jogo $\mathrm{EHR}_m(G, H)$. Veremos no próximo capítulo um resultado que relaciona este jogo com o fato de $p(n)$ satisfazer a lei zero-um.

CAPíTULO 3

A *ponte* e um resultado clássico

Apresentamos neste capítulo o resultado que relaciona o Jogo de Ehrenfeucht em grafos aleatórios a leis zero-um nestas mesmas estruturas. Chamamos este resultado de *ponte* e o apresentamos na seção 3.1. A seguir, na seção 3.2, apresentamos o primeiro resultado sobre leis zero-um em grafos aleatórios, a saber, o resultado de Glebskii-Fagin. Este resultado já nos mostra uma estratégia vitoriosa em jogos de Ehrenfeucht para grafos aleatórios. Em sua demonstração, já utilizamos a *ponte*.

3.1. A *ponte* entre a lógica e a combinatória

O resultado *ponte* tem o seguinte enunciado:

TEOREMA 3.1 (Ehrenfeucht / Lei Zero-Um: *Ponte*). *Sejam* $G = G_{n,p(n)}$ *e* $H = H_{n,p(n)}$ *dois grafos aleatórios em conjuntos de vértices disjuntos tais que para todo natural* t *tenhamos que o Duplicator vence* $\mathrm{EHR}_t(G, H)$ *com probabilidade tendendo a* 1 *conforme* $n \to \infty$. *Então, temos que* $p(n)$ *satisfaz a lei* $0 - 1$.

Antes de mais nada, convém observar o seguinte: o Teorema 3.1 tem como hipótese que para todo natural t fixado, o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_t(G, H)$ com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$. Para cada função $p(n)$, o Duplicator deve ter uma estratégia vitoriosa para que ele possa garantir a hipótese acima mencionada e, pelo Teorema 3.1 garantir que $p(n)$ satisfaz a lei zero-um.

Vejamos, a seguir, um corolário do Teorema de Ehrenfeucht (Teorema 2.1) que nos auxiliará na prova do Teorema 3.1.

COROLÁRIO 3.2 (do Teorema de Ehrenfeucht para grafos). *Consideremos* A *uma fórmula de* $FOTOG$. *Suponhamos que* G *e* H *são grafos quaisquer com* $G \models A$ *e* $H \models \neg A$. *Então temos que o Spoiler vence* $\mathrm{EHR}_{qr(A)}(G, H)$.

PROVA. Tomemos uma fórmula A de FOTOG. Suponhamos que G satisfaz A e H não satisfaz A. Podemos afirmar então que não se dá $G \equiv_{qr(A)} H$. Pelo Teorema de Ehrenfeucht (mais especificamente a implicação (3) $\to$ (1)) temos que o Spoiler vence $\mathrm{EHR}_{qr(A)}(G, H)$. $\square$

Agora, passemos à prova do Teorema 3.1.

Prova do Teorema 3.1. Vamos fazer a prova por contradição. Definamos a seqüência x_n tal que x_n é a probabilidade de $G_{n,p(n)}$ satisfazer A. Se x_n não convergir para 0 nem para 1 então temos dois casos:

1. existe uma subseqüência y_s de x_n e existe também um $y \in (0,1)$ tal que $y_s \to y$ ou
2. existem duas subseqüências z_r e w_t de x_n tais que, respectivamente, $z_r \to 0$ e $w_t \to 1$.

Como no primeiro caso temos que $y_s \to y$ então G ou H (e exatamente um dos dois) satisfaz A com probabilidade convergente a $2y(1-y) > 0$ conforme $n \to \infty$ e pelo Corolário 3.2 temos com probabilidade convergente a $2y(1-y) > 0$ conforme $n \to \infty$ que o Spoiler vence $\mathrm{EHR}_t(G, H)$ para algum natural t e obtemos uma contradição. Temos no segundo caso que $z_r \to 0$ e $w_t \to 1$ o que significa, respectivamente, que o grafo G (na subseqüência dos z_r) não satisfaz A com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ e o grafo H (na subseqüência dos w_t) satisfaz A com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$. Novamente pelo Corolário 3.2 obtemos uma contradição.

$\square$

3.2. O resultado de Glebskii-Fagin

Consideremos o grafo aleatório $G_{n,k}$. Apresentamos nesta seção o resultado obtido por Glebskii, Kogan, Liogonkii e Talanov [**8**] e também obtido independentemente por Fagin [**7**] que, em termos gerais, diz que $p(n) = k$ satisfaz a lei zero-um em FOTOG. O resultado tem o seguinte enunciado.

Teorema 3.3 (Glebskii-Fagin). *Consideremos $G_{n,k}$ e B uma propriedade de grafos expressa em FOTOG. Temos que $p(n) = k$ satisfaz a lei $0-1$ em FOTOG.*

A idéia é utilizar o Teorema 3.1 mas para tanto precisamos achar uma estratégia vitoriosa para o Duplicator. A estratégia vitoriosa para o Duplicator no contexto de $p(n) = k$ está baseada na propriedade ϕ_s que o grafo aleatório $G_{n,k}$ satisfaz com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$. Dizemos que um grafo G satisfaz a propriedade ϕ_s se para quaisquer dois conjuntos disjuntos de vértices $U = \{u_1, \ldots, u_a\}$ e $V = \{v_1, \ldots, u_b\}$ com $a + b \leq s$ tivermos um vértice $z \notin U \cup V$ tal que para todo $x \in U$ tivermos que $x \sim z$ e para todo $y \in V$, não tivermos $y \sim z$.

Lema 3.4. *Seja s um inteiro positivo. $G_{n,k}$ satisfaz quase sempre a propriedade ϕ_s com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$.*

Prova. Fixemos dois conjuntos disjuntos $U = \{u_1, \ldots, u_a\}$ e $V = \{v_1, \ldots, u_b\}$ de vértices de $G_{n,k}$ com $a + b \leq s$. Seja $E_{U,V,x}$ o seguinte evento: "existe um vértice $x \notin U \cup V$ de $G_{n,k}$ tal que para todo $z \in U$ temos que $x \sim z$ e para todo $w \in V$ não temos que $w \sim z$". Então

$$\Pr(E_{U,V,x}) = k^a(1-k)^b.$$

Consideremos o seguinte evento:

$$E_{U,V} = \bigwedge_{x \notin U \bigcup V} \neg E_{U,V,x}$$

com todos os eventos mutuamente independentes já que envolvem arestas diferentes. Então:

$$\Pr(E_{U,V}) = \Pr(\bigwedge_{x \notin U \cup V} \neg E_{U,V,x}) = [1 - k^a(1-k)^b]^{n-a-b}.$$

Variando os conjuntos U e V, temos

$$\Pr(\overline{G_{n,k} \models \phi_s}) = \binom{n}{a}\binom{n-a}{b}[1 - k^a(1-k)^b]^{(n-a-b)} =$$

$$= \frac{n!}{a!(n-a)!}\frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!}e^{(n-a-b)ln(1-p^a(1-k)^b)} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Portanto, $\Pr(G_{n,k} \models \phi_s) \to 1$. □

Agora, podemos apresentar a prova do Teorema 3.3.

Prova. Seja t um natural, $G = G_{n,k}$ e $H = H_{n,k}$ dois grafos aleatórios com conjuntos de vértices disjuntos. Consideremos o jogo $\mathrm{EHR}_t(G, H)$. Se $t = 0$ então o Duplicator vence $\mathrm{EHR}_t(G, H)$ pela Observação 1.13, item 3. Suponhamos que $t \neq 0$. Consideremos a seguinte estratégia para o Duplicator: suponhamos que os vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ foram escolhidos em $G_{n,k}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ em $H_{m,k}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que o Spoiler escolhe x_i em $G_{n,k}$. Seja $A_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$. Consideremos o subconjunto $B_i = \{x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pr}\}$ de A_i tal que todo vértice de B_i é adjacente a x_i. Também consideremos o subconjunto $C_i = \{x_{q1}, x_{q2}, \ldots, x_{qs}\}$ de A_i tal que $B_i \bigcup C_i = A_i$. Como o grafo $H_{n,k}$, pelo Lema 3.4, satisfaz a propriedade ϕ_t com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$, tomemos y_i em $H_{n,k}$ tal que y_i seja adjacente a todos os vértices de D_i e não adjacente a todos os vértices de E_i onde $D_i = \{y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pr}\}$ e $E_i = \{y_{q1}, y_{q2}, \ldots, y_{qs}\}$. Através desta estratégia, o Duplicator consegue com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ escolher vértices em qualquer um dos dois grafos "imitando" as escolhas do Spoiler. Assim, ele vence $\mathrm{EHR}_t(G_{n,k}, H_{n,k})$ com probabilidade convergente a 1 enquanto $n \to \infty$ e pelo Teorema 3.1, $p(n) = k$ satisfaz a lei zero-um em FOTOG. □

O caso $p(n) = k$ considerado no teorema de Glebskii-Fagin já é clássico no estudo de leis zero-um para grafos aleatórios. As funções $p(n)$ não constantes constituem outros exemplos nesta área. Spencer e Shelah em **[13]** estudaram o caso $p(n) = n^{-\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$ irracional e para esta função vale a lei-zero um. A irracionalidade de α é essencial para a veracidade deste fato.

Temos que se α for racional, $p(n)$ não satisfaz a lei zero-um. Tomemos $r(n) = n^{-2/3}$ que é uma função limiar para a propriedade de um grafo conter um K^4. Em outras palavras, se $p(n) \ll r(n)$ então $G_{n,p(n)}$ quase certamente não contém um K^4 e quando $p(n) \gg r(n)$, $G_{n,p(n)}$ quase certamente contém um K^4. Quando $p(n) = r(n)$ a probabilidade de $G_{n,p(n)}$ conter um K^4 converge a um valor estritamente entre 0 e 1, a saber: $1 - e^{-1/24}$.

Passemos agora a considerar $p(n) = n^{-\alpha}$ com α irracional. A idéia novamente é encontrar uma estratégia vitoriosa para o Duplicator para jogos em grafos aleatórios do tipo $G_{n,n^{-\alpha}}$. Seria muito útil se a estratégia que aplicamos para o caso $p(n) = k$ servisse também para o caso $p(n) = n^{-\alpha}$. Contudo, se tomarmos $\alpha \in (1/2, 1)$ irracional temos que $G_{n,n^{-\alpha}}$ temos que para y_1, $y_2 \in G_{n,n^{-\alpha}}$, com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ y_1 e y_2 não têm vizinho em comum. Com isso em mente, o Spoiler pode vencer o jogo EHR$(G, H, 3)$ com $G = G_{n,n^{-\alpha}}$ e $H = H_{n,n^{-\alpha}}$ em conjuntos de vértices disjuntos descrito a seguir: no primeiro lance, o Spoiler escolhe $x_1 \in G$ e o Duplicator escolhe $y_1 \in H$. Suponhamos que exista $x_2 \in G$ tal que a distância entre x_1 e x_2 seja 2, ou seja, x_1 e x_2 tenha vizinho em comum. Seja x_3 este vizinho em comum. Então, no segundo lance, o Spoiler escolhe este x_2 e o Duplicator, com base na estratégia utilizada na demonstração do Teorema de Glebskii-Fagin, escolhe y_2 não adjacente a y_1. Se y_1 e y_2 não tiverem vizinho em comum, o Spoiler escolhe $x_3 \in G$ e vence o EHR$(G, H, 3)$.

Assim, para $p(n) = n^{-\alpha}$ necessitamos encontrar uma estratégia mais elaborada para o Duplicator. Isto será visto no próximo capítulo.

CAPíTULO 4

O resultado de Shelah-Spencer

Conforme comentamos na Introdução, Shelah e Spencer em [**13**] estudaram várias funções $p(n)$ que satisfazem a lei zero-um em FOTOG. Eles obtiveram o seguinte resultado um tanto surpreendente.

TEOREMA 4.1 (Shelah-Spencer). *Seja $p(n) = n^{-\alpha}$ tal que α é irracional, α estritamente entre 0 e 1. Então $p(n)$ satisfaz a lei zero-um.*

Ao longo deste capítulo, fixemos um irracional $\alpha \in (0,1)$. Assim podemos escrever denso, esparso, rígido, seguro e articulado ao invés de, respectivamente, α-denso, α-esparso, α-rígido, α-seguro e α-articulado. Além disso, nos permitimos um outro abuso de notação. Seja (R,H) um grafo enraizado. Denotaremos o conjunto de vértices do grafo H simplesmente por H e seu conjunto de arestas por $E(H)$. Seja H^* tal que $R \subseteq H^* \subset H$. Denotaremos por (R,H^*) o grafo enraizado no qual o grafo H^* é o subgrafo induzido pelo conjunto H^*. Este abuso de notação justificar-se-á pela legibilidade das demonstrações.

Dividimos este capítulo em quatro subseções: na seção 4.1 apresentamos fatos básicos sobre grafos enraizados; na seção 4.2 apresentamos resultados relativos a fechos e extensões e na seção 4.3 temos a prova do Teorema de Shelah-Spencer. A idéia deste resultado é a mesma da do resultado de Glebskii-Fagin porém a estratégia vitoriosa para o Duplicator é bem mais elaborada.

4.1. Fatos básicos sobre grafos enraizados

Um dos objetivos desta seção é mostrar que para um subconjunto X de vértices de um grafo temos que $(X, \mathrm{cl}_{t,\alpha}(X))$ é rígido com t natural e α irracional estritamente entre 0 e 1.

LEMA 4.2. *Consideremos um grafo enraizado (H_0, H_1) e um conjunto H tal que $H_0 \subset H \subset H_1$. Seja (H_0, H_1), (H_0, H) e (H, H_1) com tipos, respectivamente, (v,e), (v',e') e (v'',e''). Temos que $v = v'+v''$ e $e = e'+e''$.*

PROVA. Imediata. □

LEMA 4.3. *Consideremos as hipóteses do Lema 4.2. Se (H_0, H) e (H, H_1) forem esparsos então (H_0, H_1) será esparso.*

PROVA. Conseqüência direta do Lema 4.2. □

LEMA 4.4. *Consideremos as hipóteses do Lema 4.2. Se* (H_0, H) *e* (H, H_1) *forem densos,* (H_0, H_1) *será denso.*

PROVA. Conseqüência direta do Lema 4.2. $\square$

LEMA 4.5. *Se* (H_0, H_1) *for esparso então* (H, H_1) *será seguro para algum* H*,* $H_0 \subseteq H \subset H_1$.

PROVA. Tomemos H maximal tal que $H \subset H_1$ com (H_0, H) denso. Se não existir tal H, tomemos $H = H_0$. Se (H, H_1) não for seguro, algum (H, H') será denso mas pelo Lema 4.4 teríamos que (H_0, H') é denso, contrariando a maximalidade de H. $\square$

LEMA 4.6. *Se* (H_0, H_1) *for denso então* (H, H_1) *será rígido para algum* H*,* $H_0 \subset H \subseteq H_1$.

PROVA. Tomemos H minimal tal que $H_0 \subset H$ com (H, H_1) esparso. Se não houver tal H, tomemos $H = H_1$. Se (H_0, H) não for rígido, algum (H', H) será esparso mas pelo Lema 4.3 teríamos que (H', H_1) é esparso, contrariando a minimalidade de H. $\square$

LEMA 4.7. *Consideremos* (H_0, H_1) *articulado de tipo* (v, e)*. Seja também* H *tal que* $H_0 \subset H \subset H_1$*. Consideremos que* (H_0, H) *tem tipo* (v', e')*. Então* $e'/v' \leq e/v$.

PROVA. Inicialmente, como (H_0, H_1) é articulado então ele é seguro e, em particular, é esparso. Portanto, $e/v < \alpha^{-1}$.

Suponhamos que

$$\frac{e'}{v'} > \frac{e}{v}$$

e daí obtemos que

$$\frac{e - e'}{v - v'} < \frac{e}{v}$$

concluindo que (H, H_1) que, pelo Lema 4.2 tem tipo $(v - v', e - e')$, é esparso. Pelo Lema 4.5 temos que existe um H^* tal que $H \subseteq H^* \subset H_1$ tal que (H^*, H_1) é seguro contrariando a hipótese inicial de que (H_0, H_1) é articulado. $\square$

LEMA 4.8. *Considere* X *um grafo. Se* (H_0, H_1) *for denso e* $X \cap H_1 = \emptyset$ *então* $(H_0 \cup X, H_1 \cup X)$ *é denso.*

PROVA. Suponhamos que (H_0, H_1) tenha tipo (v, e). Então $(H_0 \cup X, H_1 \cup X)$ tem tipo (v, e') com $e \leq e'$ pois toda aresta contada em (H_0, H_1) ainda é contada em $(H_0 \cup X, H_1 \cup X)$ e ainda podemos ter "arestas extras" do grafo X. $\square$

LEMA 4.9. *Sejam* (H_0, H) *e* (H, H_1) *rígidos. Então* (H_0, H_1) *é rígido.*

PROVA. Seja H^* tal que $H_0 \subseteq H^* \subset H_1$. Como (H_0, H) é rígido então, aplicando o Lema 4.8 com $X = H^* - H$, temos que $(H^*, H \cup H^*)$ é denso. Como (H, H_1) é rígido, $(H \cup H^*, H_1)$ é denso. Pelo lema 4.4, (H^*, H) é denso. $\square$

LEMA 4.10. *Seja (H_0, H_1) articulado e consideremos H tal que $H_0 \subset H \subset H_1$. Então (H, H_1) é rígido.*

PROVA. Suponhamos que (H, H_1) não seja rígido e portanto que (H', H_1) é esparso para H' tal que $H \subseteq H' \subset H_1$. Pelo Lema 4.5, temos que (H'', H_1) é seguro para algum H'' tal que $H \subseteq H'' \subset H_1$ contrariando a hipótese de que (H_0, H_1) é articulado. $\square$

LEMA 4.11. *Seja (H_0, H_1) rígido. Consideremos também um grafo X tal que $X \cap H_1 = \emptyset$. Temos então que $(H_0 \cup X, H_1 \cup X)$ é rígido.*

PROVA. Seja H^* tal que $H_0 \cup X \subseteq H^* \subseteq H_1 \cup X$. Como (H_0, H_1) é rígido, temos que $(H^* - X, H_1)$ é denso e, pelo Lema 4.11, $(H^*, H_1 \cap X)$ é denso. $\square$

LEMA 4.12. *Seja G um grafo e um conjunto H_0 tal que $H_0 \subseteq G$. Seja (H_0, H_i) rígido tal que $H_0 \subset H_i \subseteq G$ e $i \in \{1, \ldots, s\}$. Então $(H_0, \bigcup_{i=1}^{s} H_i)$ é rígido.*

PROVA. Vamos fazer a prova por indução em s. Inicialmente, consideremos $s = 2$. Como (H_0, H_2) é rígido então $(H_1 \cap H_2, H_2)$ é rígido. Aplicando o Lema 4.11 para $X = H_1 - H_2$ então $(H_1, H_1 \cup H_2)$ é rígido. Pelo Lema 4.9, como (H_0, H_1) e $(H_1, H_1 \cup H_2)$ são rígidos, temos então que $(H_0, H_1 \cup H_2)$ é rígido.

Consideremos agora o caso em que $s > 2$. Queremos provar que

$$(H_0, \bigcup_{i=1}^{s} H_i)$$

é rígido, ou seja, $\forall H^*$, $H_0 \subseteq H^* \subset \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, temos que $(H^*, \bigcup_{i=1}^{s} H_i)$ é denso. Suponhamos que existe um H^*, $H_0 \subseteq H^* \subset \bigcup_{i=1}^{s} H_i$, tal que $(H^*, \bigcup_{i=1}^{s} H_i)$ é esparso. Seja $(H^*, \bigcup_{i=1}^{s} H_i)$ com tipo (v, e). Temos então que

$$v - \alpha e > 0. \tag{1}$$

Podemos escrever H^* na forma $[H^* \cap \bigcup_{i=1}^{s-1} H_i] \cup [H^* \cap H_s]$.

Agora, consideremos os grafos enraizados

$$(H^* \cap \textstyle\bigcup_{i=1}^{s-1} H_i, \bigcup_{i=1}^{s-1} H_i),\ (H^* \cap H_s, H_s) \text{ e } (H^* \cap (\bigcup_{i=1}^{s-1} H_i \cap H_s), \cup_{i=1}^{s} H_i)$$

com tipos (v_1, e_1), (v_2, e_2) e (v_3, e_3), respectivamente.

Temos que

$$v = v_1 + v_2 - v_3$$

e além disso,

$$e = e_1 + e_2 - e_3.$$

Então, da desigualdade 1 temos que:

$v_1 + v_2 - v_3 - \alpha(e_1 + e_2 - e_3) > 0 \rightarrow (v_1 - \alpha e_1) + (v_2 - \alpha e_2) - (v_3 - \alpha e_3) > 0$

o que implica que

1. $(H^* \cap \bigcup_{i=1}^{s-1} H_i, \bigcup_{i=1}^{s-1} H_i)$ é esparso, fato que contradiz a hipótese de indução que diz que $(H_0, \bigcup_{i=1}^{s-1} H_i)$ é rígido ou

2. $(H^* \cap H_s, H_s)$ é esparso o que contradiz o fato de (H_0, H_s) ser rígido.

$\square$

COROLÁRIO 4.13. *Seja G um grafo e $X = \{X_1, \ldots, X_r\}$ um conjunto de vértices de G. Seja t um natural e $\alpha \in (0,1)$ irracional. Temos que $(X, \mathrm{cl}_{t,\alpha}(X))$ é rígido.*

PROVA. Conseqüência do Lema 4.11. $\square$

4.2. Resultados sobre fechos e extensões

Vimos no Capítulo 4 que para $p(n) = n^{-\alpha}$ o Duplicator não poderia utilizar a mesma estratégia que ele utilizou para o caso $p(n) = k$ com k constante. Isto significa que o Duplicator deve adotar uma estratégia vitoriosa original para o estudo da lei zero-um em $G_{n,p(n)}$ com $p(n) = n^{-\alpha}$ com α irracional. Esta estratégia se baseia na utilização de fechos. Quando o Spoiler, em um jogo $\mathrm{EHR}_m(G, H)$, escolhe um vértice $x_i \in G$, por exemplo, o Duplicator vai observar um certo s-fecho de $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$ e vai escolher um $y_i \in H$ tal que $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$ e $\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$ tenham s-fechos isomorfos. Em linhas gerais, é esta a estratégia que o Duplicator deve adotar para para o caso $p(n) = n^{-\alpha}$ com α irracional.

Os resultados que vemos nesta seção são essenciais para a demonstração do Teorema de Shelah-Spencer (Teorema 4.1).

LEMA 4.14. *Sejam α, r, t fixos. Então existe um inteiro positivo $K = K(\alpha, r, t)$ tal que em $G_{n,n^{-\alpha}}$ temos com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ que*

$$|\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X_1, \ldots, X_r)| \leq K$$

para qualquer conjunto $X = \{X_1, \ldots, X_r\}$ de vértices de $G_{n,n^{-\alpha}}$.

PROVA. Seja

$$A = \{(R, H) \text{ denso} : |R| = r \text{ e } v(R, H) \leq t\}.$$

Temos que A é finito. Seja

$$\epsilon = \max\{\alpha e(R, H) - v(R, H) : (R, H) \in A\}.$$

Afirmamos que $K = \lceil \frac{r}{\epsilon} \rceil t$. Temos que provar que $|\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)| \leq K$. Suponhamos que para um certo $X = \{X_1, \ldots, X_r\}$ tenhamos que $|\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)| > K$.

Vamos provar que o subgrafo induzido por $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)$ aparece em G com probabilidade convergente a 0 conforme $n \to \infty$.

Se $|\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)| > \lceil \frac{r}{\epsilon} \rceil t$ então existem conjuntos $Y^1, \ldots, Y^L$ com $L > \lceil \frac{r}{\epsilon} \rceil$ tal que cada Y^j é a imagem de uma (R_j, H_j)-extensão rígida g'_j da R_j-extensão g_j que leva R em X. Passemos agora à construção do subgrafo de $G_{n,n^{-\alpha}}$ induzido por $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)$. Consideremos uma seqüência de subgrafos induzidos $G_1, \ldots, G_L$ de $G_{n,n^{-\alpha}}$ tais que o grafo G_1 é o subgrafo de $G_{n,n^{-\alpha}}$ induzido por X e o grafo G_j com $j > 1$ é o subgrafo de $G_{n,n^{-\alpha}}$ induzido pela reunião do conjunto de vértices de G_{j-1} com Y^j. Notemos que o grafo G_L é o subgrafo de $G_{n,n^{-\alpha}}$ induzido por $\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)$.

Consideremos $j > 1$. Temos que $Y^j = Z^j \cup W^j$ tal que Z^j é o conjunto de vértices que já estão em G_{j-1} e W^j o conjunto de vértices que ainda não estão, pois podemos ter que os Y^j não sejam disjuntos. O conjunto de vértices de G_i é o conjunto de vértices de G_{j-1} reunido com W^j. Suponhamos que com esta reunião, foram adicionados $v_j = |W^j|$ *novos* vértices e e_j *novas* arestas para formar G_j. Como (X, Y^j) é rígido, pelo Lema 4.12 temos que $(X, \bigcup_{i=1}^{j} Y^i)$ é rígido e, daí, $(X \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} Y^i \cup Z^j, X \cup \bigcup_{i=1}^{j} Y^i)$ é denso. Portanto, temos que $v_j - \alpha e_j < 0$.

Através do argumento acima para $G_2, \ldots, G_L$ temos que

$$v_j - \alpha e_j < \epsilon, \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, L\}.$$

e, portanto que

$$\sum_{i=1}^{L} v_j - \alpha e_j < L\epsilon.$$

Como $L > \lceil \frac{r}{\epsilon} \rceil$, temos então que $r - L\epsilon < 0$. A probabilidade de G_L estar contido em $G_{n,n^{-\alpha}}$ é limitada por

$$n^{r+v_1+\ldots+v_L} p^{e_1+\ldots+e_L} = n^{r+v_1+\ldots+v_L-\alpha(e_1+\ldots+e_L)} =$$

$$= n^{r+(v_1-\alpha e_1)+\ldots+(v_L-\alpha e_L)} \leq n^{r-L\epsilon} \to 0.$$

Portanto, G_L não pode existir e então temos com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ que $|\mathrm{cl}_{t,\alpha}(X)| \leq K$. □

COROLÁRIO 4.15. *Seja (H_0, H_1) rígido. Então existe L tal que quase sempre para toda função injetora $f\colon H_0 \to V(G)$, temos no máximo L extensões $g_1, \ldots, g_L$.*

PROVA. Conseqüência da prova do Lema 4.14. □

LEMA 4.16. *Seja (H_0, H_1) denso. Então existe M tal que, com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$, para toda função injetora $f\colon H_0 \to V(G_{n,n^{-\alpha}})$, existem no máximo M (H_0, H_1)-extensões disjuntas $g_1, \ldots, g_M$.*

PROVA. Seja $r = |H_0|$ e (H_0, H_1) com tipo (v, e). Afirmamos que existem

$$M = \lceil \frac{-c}{v - \alpha e} \rceil$$

(H_0, H_1)-extensões disjuntas. Suponhamos que exista uma função f conforme descrita no enunciado tal que tenhamos M (H_0, H_1)-extensões com $M > \lceil \frac{-c}{v-\alpha e} \rceil$. Temos então que $c + M(v - \alpha e) \leq 0$. Temos que existem menos que $n^c (n^v)^M$ $(f, g_1, \ldots, g_M)$ com todas as g_i sendo H_0-extensões. Cada g_i é uma (H_0, H_1)-extensão com probabilidade p^e e, já que são disjuntas, todas as g_i juntas são (H_0, H_1)-extensões com probabilidade p^{eM}. Portanto, a probabilidade de $(f, g_1, \ldots, g_M)$ existir com todas as g_i sendo (H_0, H_1)-extensões é menor que $n^c (n^v)^M p^{eM} = n^{c+vM-\alpha eM} \to 0$. $\square$

Consideremos (H_0, H_1) um grafo enraizado, G um grafo, $f \colon H_0 \to G$ uma função injetora e B um subconjunto de vértices de G. Dizemos que o par (f, B) está OK se existir (H_0, H_1)-extensão $g \colon H_1 \to G$ contida em B. Caso contrário, dizemos que (f, B) não está OK.

LEMA 4.17. *Seja (H_0, H_1) articulado. Existe uma constante $k > 0$ tal que se $m = kn^{\alpha \frac{e}{v}}$ e se $f : H_0 \to G_{n,n^{-\alpha}}$, $B \subset V(G_{n,n^{-\alpha}})$ com $|B| = m$, fixado, então $\Pr((f, B)$ não está OK $) < \frac{1}{2}$.*

PROVA. Por conveniência, tiremos $f(H_0)$ de B, ajustando k se necessário de tal modo que tenhamos $f(H_0) \cap B = \emptyset$.

Para cada $S \subset B$ com tamanho $|H_1 - H_0|$, especifiquemos arbitrariamente uma H_0-extensão g_S com $g(H_1 - H_0) = S$. Definamos uma variável X_S tal que:

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{se } g_S \text{ é } (H_0, H_1)\text{-extensão} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $X = \sum X_S$. Temos que $\mathrm{Esp}(X_S) = p^e$ e, além disso,

$$\mathrm{Esp}(X) = \binom{m}{v} p^e < \frac{k^v}{v!}.$$

Queremos $\Pr(X = 0) < \frac{1}{2}$. Temos

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_S \mathrm{Var}(X_S) + \sum_{S \neq T} \mathrm{Cov}(X_S, X_T) \leq E(X) + \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{|S \cap T| = j} \mathrm{Cov}(X_S, X_T).$$

Quando $j = 0$, X_S e X_T são independentes e $\mathrm{Cov}(X_S, X_T) = 0$. Senão,

$$\mathrm{Cov}(X_S, X_T) \leq \mathrm{Esp}(X_S X_T) = p^u.$$

Aqui, u é o número de pares que são imagens de $\{x, y\} \in E(H_1)$, $y \notin H_0$ por g_S ou g_T. Como g_S e g_T são bijeções, há e tais pares de vértices em cada caso e então $u = 2e - u'$ com u' sendo o número de pares em ambos S e T. Seja $H = g_s^{-1}(S \cap T)$ tal que $|H| = j$. Então u' conta no máximo $\{x, y\} \in E(H \cup H_0)$ com $y \notin H_0$.

Pelo Lema 4.7, já que (H_0, H_1) é articulado, temos que $u'/j \leq e/v$. Daí,

$$\sum_{|S \cap T|=j} \mathrm{Cov}(X_S, X_T) \leq m^{2v-j} p^{2e-j(e/v)} = (m^v p^e)^{2-j/v}.$$

Considerando que $m^v p^e = k^v$ temos que

$$\mathrm{Var}(X) \leq \frac{k^v}{v!} + \sum_{j=1}^{v-1} (k^v)^{2-j/v} < \frac{1}{2} \mathrm{Esp}^2(X)$$

e o resultado segue da desigualdade de Chebyshev. □

TEOREMA 4.18. *Seja (H_0, H_1) seguro. Então, com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$, existem reais positivos c_1 e c tais que para toda $f : H_0 \to G_{n,n^{-\alpha}}$ temos que*

$$n^{v-\alpha e} (\log n)^{-c} < N(f, H_0, H_1) < c_1 n^{v-\alpha e}.$$

PROVA. Comecemos por provar o limitante inferior. Consideremos $C \subset G_{n,n^{-\alpha}}$ com

$$|C| = k_1 n^{\frac{\alpha e}{v}} \log n.$$

Dividamos C em $k_2 \log n$ conjuntos disjuntos de tamanho m dado pelo Lema 4.17. Chamemos estes conjuntos de $B_1, \ldots, B_{k_2 \log n}$. Para que (f, C) não esteja OK, todos os pares (f, B_i) devem não estar OK. Porém como os eventos "(f, B_i) não está OK" envolvem conjuntos disjuntos de vértices e, portanto, são independentes. Daí,

$$\Pr((f, C) \text{ não está OK}) < \tfrac{1}{2^{k_2 \log n}} < \tfrac{1}{2}.$$

Temos que para n suficientemente grande, temos $n^{|H_0|}$ funções injetoras $f \colon H_0 \to G_{n,n^{-\alpha}}$. Seja A o conjunto destas funções. Além disso, seja A' o conjunto das funções injetoras $\overline{f}$ tais que $(\overline{f}, C)$ não está OK. Temos que

$$\mathrm{card}(A') \leq \frac{n^{|H_0|}}{2}$$

pois $\mathrm{card}(A') \leq \mathrm{card}(A')/2$. Seja $M = |C|$. Cada (H_0, H_1)-extensão $g \colon H_1 \to G$ está contida em $\binom{n-v}{M-v} \sim \binom{n}{M} (\frac{M}{n})^v$ M-conjuntos. No total, temos que no máximo $|N(f, H_0, H_1)| \binom{n-v}{M-v}$ M-conjuntos contem uma (H_0, H_1)-extensão mas pelo menos $\frac{1}{2}\binom{n}{M}$ contem uma (H_0, H_1)-extensão. Assim,

$$|N(f, H_0, H_1)| \left(\frac{M}{n}\right)^v \geq \frac{1}{2}$$

e daí,

$$|N(f, H_0, H_1)| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{M}\right)^v > n^{v-\alpha e} (\ln n)^{-v+o(1)}.$$

Com isso, provamos o limitante inferior. Passemos agora à prova do limitante superior.

Fixemos $f\colon H_0 \to G$ e seja $s' = N(f, H_0, H_1)$. Para qualquer $h \in H_1$, $y \in G$ temos que $(H_0 \cup \{h\}, H_1)$ é rígido pelo Lema 4.10. Pelo Corolário 4.15 há no máximo L (H_0, H_1)-extensões g com $g(h) = y$. Consideremos a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 4.19. *Cada (H_0, H_1)-extensão g intercepta no máximo Lv^2 (H_0, H_1)-extensões.*

PROVA. Inicialmente, suponhamos por absurdo que exista uma (H_0, H_1)-extensão g que intercepte mais de Lv^2 outras (H_0, H_1)-extensões. Vamos escolher um elemento na intersecção de $g(H_1 - H_0)$ com cada uma das outras (H_0, H_1)-extensões e marcá-lo. Ao final das escolhas teremos mais de Lv^2 marcas. Como $|g(H_1 - H_0)| = v$ temos algum elemento de $g(H_1 - H_0)$ com mais de Lv marcas. Seja $\overline{y}$ esse elemento. Tomemos todas as (H_0, H_1)-extensões que possuem $\overline{y}$ como elemento marcado. Consideremos $j_1, \ldots, j_r$, com $r > Lv$, elementos de cada uma das (H_0, H_1)-extensões consideradas. Tomemos $h_{j_1}, \ldots, h_{j_r}$ as imagens inversas de $j_1, \ldots, j_r$. Como $\{h_{j_1}, \ldots, h_{j_r}\}$ tem cardinalidade v então algum j_i foi usado mais de L vezes o que é uma contradição. $\square$

Temos pela afirmação acima um conjunto de $s = s'/(Lv^2 + 1)$ extensões disjuntas.

Há menos de $n^c \binom{n}{v}^s / s!$ pares consistindo de uma função injetora $f\colon H_0 \to G$ e de um conjunto $\{g_1, \ldots, g_s\}$ de H_0-extensões de f. A probabilidade de todas as g_i serem (H_0, H_1)-extensões é p^{es}. Assim, a probabilidade de $g_1, \ldots, g_s$ serem (H_o, H_1)-extensões de f é no máximo

$$\frac{n^c n^{vs} p^{es}}{s!} < n^c (2.72 n^v p^{e/s})^s \ll 1$$

quando $s = 3n^{v-\alpha e}$. Assim, temos que:

$$N(f, H_0, H_1) \leq 3(Lv^2 + 1) n^{v - \alpha e}.$$

$\square$

TEOREMA 4.20. *Seja $y \in \mathrm{cl}_K(R)$, $z \in \mathrm{cl}_b(R \cup \{y\})$. Então $z \in \mathrm{cl}_{b+K}(R)$.*

PROVA. Se $z \in R$ então $z \in \mathrm{cl}_{b+K}(R)$. Suponhamos que $z \notin R$. Como $y \in \mathrm{cl}_K(R)$ então existe um grafo enraizado rígido (R, H_1) com $H_1 \subseteq G$ e $v(R, H_1) \leq K$. Como $z \in \mathrm{cl}_b(R \cup \{y\})$ então existe um grafo enraizado rígido $(R \cup \{y\}, H_2)$ com $H_2 \subseteq G$ e $v(R, H_2) \leq b$. Se tomarmos $X = H_1 - H_2)$ temos, pelo Lema 4.11 temos que $(H_1, H_1 \cup H_2)$ é rígido. Notemos que $z \in H_1 \cup H_2$. Então, pelo Lema 4.9, temos que $(R, H_1 \cup H_2)$ é rígido. Temos que $(R, H_1 \cup H_2) \subseteq \mathrm{cl}_{b+K}(R)$ e portanto temos que $z \in \mathrm{cl}_{b+K}(R)$. $\square$

TEOREMA 4.21. *Seja $K = v(R, H)$ e consideremos $S = \mathrm{cl}_K(R)$. Assumamos $S \neq H$. Então (S, H) é seguro.*

PROVA. Se (S, H) não for seguro, algum (S, T) será denso para $S \subset T \subseteq H$. Seja este tal conjunto T minimal.

Afirmamos que (S, T) é rígido. Caso contrário, algum (W, T) seria esparso para algum W tal que $S \subseteq W \subset T$ mas então (S, W) teria que ser denso contrariando a minimalidade de T. Portanto, (S, T) é rígido o que é uma contradição pois $T \subset S$. $\square$

4.3. A prova

PROVA DO TEOREMA DE SHELAH-SPENCER (4.1). Consideremos um jogo de Ehrenfeucht de t lances em dois grafos $G_1 = G_{n,n^{-\alpha}}$ e $G_2 = G_{m,m^{-\alpha}}$. Neste contexto, o Duplicator utiliza a estratégia de *lookahead* que em linhas gerais consiste no seguinte: antes de começar a jogar o Duplicator constrói um vetor $A = (a_0, a_1, \dots, a_t)$ de inteiros. O Duplicator utiliza este vetor como um "guia" para as suas escolhas. Quando o Spoiler fizer sua escolha no lance i, o Duplicator utiliza a_i para poder fazer a sua escolha. Conforme já comentamos anteriormente, a estratégia para o Duplicator no contexto de $p(n) = n^{-\alpha}$ com α irracional consiste em ele escolher em cada lance "certos" fechos. O vetor A orienta o Duplicator neste sentido. Passemos agora à construção do vetor A.

Estratégia *lookahead*: A construção de A é feita de maneira indutiva reversa. Colocamos $a_t = 0$. Se ao final do jogo o Duplicator puder garantir que

$$(x_1, x_2, \dots, x_t) \equiv_0 (y_1, y_2, \dots, y_t)$$

então G e H têm os mesmos subgrafos induzidos e portanto o Duplicator vence.

Suponhamos, indutivamente, que $b = a_r$ tenha sido definido. Seja

$$K_r = \max\{\mathrm{cl}_b(z_1, \dots, z_r) : z_1, \dots, z_r \in V(G)\}.$$

Definimos $a = a_{r-1}$ por $a = K_r + b$.

Antes de começar o jogo, devemos fazer a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 4.22. *Antes do jogo começar temos que o* $\mathrm{cl}_{a_0}(\emptyset)$ *em* G_1 *é isomorfo ao* $\mathrm{cl}_{a_0}(\emptyset)$ *em* G_2.

PROVA. Temos que $\mathrm{cl}_{a_0}(\emptyset)$ é a união de grafos enraizados do tipo $(\emptyset, H)$ rígido e portanto $v - \alpha e < 0$ com v e e os números de vértices e arestas de H respectivamente. O número esperado de tais grafos H em G_1, e respectivamente em G_2, é

$$\binom{n}{v} p^e < n^v p^e < n^{v-\alpha e} = o(1)$$

para cada um dos finitos grafos H. Portanto, G_1, e respectivamente G_2, não contem tais grafos H e então $\mathrm{cl}_{a_0}(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

Precisamos mostrar que a estratégia *lookahead* funciona, ou seja, precisamos mostrar que para todo natural t fixado, o Duplicator vence com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ o jogo $\mathrm{EHR}_t(G_{n,n^{-\alpha}}, H_{n,n^{-\alpha}})$ para deste modo poder utilizar o resultado "ponte" (Teorema **??**).

Vamos começar o jogo. Suponhamos que $x_1, \dots, x_{i-1} \in G_1$ e $y_1, \dots, y_{i-1} \in G_2$ já tenham sido escolhidos e além disso

$$(x_1, \dots, x_{i-1}) \equiv_a (y_1, \dots, y_{i-1}).$$

Basta-nos provar que para qualquer $x_i \in G_1$ selecionado pelo Spoiler existe com probabilidade convergente a 1 conforme $n \to \infty$ $y_i \in G_2$ com

$$(x_1, \dots, x_i) \equiv_b (y_1, \dots, y_i).$$

Seja $x_i \in G_1$. Temos dois casos:

Caso 1: Suponhamos que $x_i \in \mathrm{cl}_{K_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})$. Pelo Teorema 4.20 temos que

$$\mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i) \subseteq \mathrm{cl}_a(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Seja ψ um isomorfismo de grafos tal que

$$\psi\colon \mathrm{cl}_a(x_1, \dots, x_{i-1}) \to \mathrm{cl}_a(y_1, \dots, y_{i-1})$$

e coloquemos $y_i = \psi(x_i)$. Então temos que $y_i \in \mathrm{cl}_{K_{i-1}}(y_1, \dots, y_{i-1})$ e novamente pelo Teorema 4.20 temos que

$$\mathrm{cl}_b(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i) \subseteq \mathrm{cl}_a(y_1, \dots, y_{i-1}).$$

Se tomarmos $\overline{\psi}$ como sendo a restrição de ψ a $\mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)$ então temos que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo de $\mathrm{cl}_a(x_1, \dots, x_i)$ em $\mathrm{cl}_a(y_1, \dots, y_i)$.

Caso 2: Suponhamos que $x_i \notin \mathrm{cl}_{K_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})$. Seja $H = \mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_i)$ e seja $S = \mathrm{cl}_{K_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}) \cap H$. Sejam $e = e(S, H)$ e $v = v(S, H)$.

Dizemos que

$$(x_1, \dots, x_i) \leq_b (y_1, \dots, y_i)$$

se existir uma função ψ tal que

$$\psi\colon \mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_i) \to \mathrm{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$$

que leva cada x_j em y_j e arestas em arestas. Notemos que possivelmente $\mathrm{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ pode ter mais vértices e/ou arestas.

AFIRMAÇÃO 4.23. *Há uma quantidade N de $y_i \in G$ tais que*

$$(x_1, \dots, x_i) \leq_b (y_1, \dots, y_i)$$

com

$$n^{v-\alpha e}(\log n)^{-c_2} < N < c_3 n^{v-\alpha e}.$$

PROVA. Pelo Teorema 4.21 (S, H) é seguro. Temos um número finito de funções injetoras $\psi : S \to \mathrm{cl}_{K_{i-1}}(y_1, \dots, y_{i-1})$. O Teorema 4.18 nos diz que há uma quantidade N' de (S, H)-extensões do tipo

$$\psi^* : \mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_i) \to G_2$$

com

$$n^{v-\alpha e}(\log n)^{-c} < N' < c_1 n^{v-\alpha e}.$$

Como $H = \mathrm{cl}_b(x_1, \dots, x_i)$, pelo Corolário 4.15, temos que $(\{x_1, \dots, x_i\}, H)$ é rígido e além disso para qualquer particular y_i há apenas um número limitado de tais ψ^* com $\psi^*(x_i) = y_i$. Então, há N diferentes y_i tal que $\psi^*(x_i) = y_i$ com

$$n^{v-\alpha e}(\log n)^{-c_2} < N < c_3 n^{v-\alpha e}.$$

□

A idéia daqui em diante é contar a quantidade de funções injetoras ψ tais que $(x_1, \dots, x_i) \leq_b (y_1, \dots, y_i)$ que são bijetoras. A seguir, veremos que a quantidade destas ψ que não são bijetoras é muito "pequena".

Deixando y_i variar em G_2, há um número finito de possíveis valores (R, H) para $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ a menos de isomorfismo. Dizemos que $(R, H) < (R, H')$ se H for um subgrafo próprio de H'. Seja $v = v(R, H)$, $e = e(R, H)$, $v' = v(R, H')$ e $e' = e(R, H)$. Temos dois casos:

1. Se $v < v'$ então se (R, H') for rígido temos que (H, H') é denso;
2. Se $v = v'$ então $e < e'$ já que $H \neq H'$.

Em qualquer um dos dois casos temos que $v' - \alpha e' < v - \alpha e$.

Pela Afirmação 4.23, há N $y_i \in G_2$ com $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ igual a (R, H) ou a (R, H') para algum $(R, H') > (R, H)$ com N tal que

$$n^{v-\alpha e}(\log n)^{-c_2} < N < c_3 n^{v-\alpha e}.$$

Para cada (R, H') há no máximo M y_i com $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ igual a (R, H') com

$$n^{v'-\alpha e'}(\log n)^{-d_2} < M < d_3 n^{v'-\alpha e'}.$$

Como $v' - \alpha e' < v - \alpha e$, então há no máximo M y_i com $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ igual a (R, H') tal que $M \ll N$.

Há apenas um número finito de possíveis (R, H') e portanto temos uma quantidade M' de y_i com $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ igual a (R, H') tal que $M' \ll N$. Daí, temos que sobra uma quantia N' de y_i com $\text{cl}_b(y_1, \dots, y_i)$ igual a (R, H). Precisamos apenas de um.

Portanto, o Duplicator sempre consegue achar um y_i tal que

$$(x_1, \dots, x_i) \equiv_b (y_1, \dots, y_i)$$

e daí ele vence o jogo. Pelo Teorema 3.1 temos que $p(n) = n^{-\alpha}$ satisfaz a lei zero-um em FOTOG. □

CAPíTULO 5

Outros resultados e considerações finais

Estudamos no presente trabalho apenas resultados sobre leis zero-um envolvendo o modelo $G_{n,p(n)}$ e ainda para este modelo temos vários outros resultados que podem ser encontrados em [**17**] de Spencer, [**15, 14**] de Spencer e Shelah e [**11**] de Luczak e Spencer.

5.1. O modelo $G_{n,\overline{p}}$

Além de $G_{n,p(n)}$, temos um outro modelo que Łuczak e Shelah estudaram com detalhe em [**10**]. Seja uma seqüência $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots)$ com $p_i < 1, \forall i$. Consideremos o grafo $G_{n,\overline{p}}$ como sendo o grafo com conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ e para quaisquer dois vértices i e j, temos que a probabilidade de ocorrer aresta $\{i, j\}$ é $p_{|i-j|}$, independentemente para cada par.

Eles obtiveram, entre outros, o seguinte resultado.

TEOREMA 5.1. *Para toda seqüência $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots)$ com $p_i < 1, \forall i$ e, além disso,*

$$\frac{\ln(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i))}{\ln n} \to 0$$

vale a lei zero-um em FOTOG.

Łuczak e Shelah estudaram ainda em [**10**] resultados para o modelo $C_{n,\overline{p}}$. Este modelo é definido similarmente ao $G_{n,\overline{p}}$ porém dados dois vértices i e j, a probabilidade da aresta $\{i, j\}$ ocorrer é $p_{\min|i-j|,n-|i-j|}$.

Além de trabalhar com modelos diferentes, Łuczak e Shelah trabalham também com lógicas de linguagens mais "expressivas" que FOTOG, ou seja, com extensões próprias de FOTOG.

5.2. Outras estruturas aleatórias

Os modelos para grafos aleatórios constituem apenas uma classe especial de estruturas para se estudar leis zero-um e, mais em geral, resultados de convergência. Ordens baseadas em grafos aleatórios constituem também uma ampla área de estudo e dentre os artigos desta área podemos citar [**9**] de Łuczak, [**12**] de Shelah, [**18**] de Winkler e [**4, 3**] de Bollobás e Brightwell.

5.3. Considerações Finais

Até onde sabemos, a abordagem Ehrenfeucht (Jogo e Teorema) tem sido utilizada apenas para grafos e ordens. Uma versão similar ao Teorema 3.1

poderia ser obtida para hipergrafos, por exemplo, bem como uma versão do Teorema de Glebskii-Fagin poderia ser escrita sem muitas dificuldades.

Referências Bibliográficas

[1] Béla Bollobás. *Graph theory*, volume 63 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. An introductory course.

[2] Béla Bollobás. *Random graphs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1985.

[3] Béla Bollobás and Graham Brightwell. The width of random graph orders. *Math. Sci.*, 20(2):69–90, 1995.

[4] Béla Bollobás and Graham Brightwell. The structure of random graph orders. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(2):318–335, 1997.

[5] Heinz-Dieter Ebbinghaus and Jörg Flum. *Finite model theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[6] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5:17–61, 1960.

[7] Ronald Fagin. Finite-model theory—a personal perspective. *Theoret. Comput. Sci.*, 116(1):3–31, 1993. International Conference on Database Theory (ICDT) (Berlin, 1992).

[8] Y. V. Glebskii, D. I. Kogan, M. I. Liogonkii, and Talanov. Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus. *Cybernetics*, 5:142–154, 1969.

[9] Tomasz Łuczak. First order properties of random posets. *Order*, 8(3):291–297, 1991.

[10] Tomasz Łuczak and Saharon Shelah. Convergence in homogeneous random graphs. *Random Structures Algorithms*, 6(4):371–391, 1995.

[11] Tomasz Łuczak and Joel Spencer. When does the zero-one law hold? *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):451–468, 1991.

[12] Saharon Shelah. Very weak zero one law for random graphs with order and random binary functions. *Random Structures Algorithms*, 9(4):351–358, 1996.

[13] Saharon Shelah and Joel Spencer. Zero-one laws for sparse random graphs. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(1):97–115, 1988.

[14] Saharon Shelah and Joel Spencer. Can you feel the double jump? In *Proceedings of the Fifth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science (Poznań, 1991)*, pages 191–204, 1994.

[15] Saharon Shelah and Joel Spencer. Random sparse unary predicates. *Random Structures Algorithms*, 5(3):375–394, 1994.

[16] Joel Spencer. Threshold spectra via the Ehrenfeucht game. *Discrete Appl. Math.*, 30(2-3):235–252, 1991. ARIDAM III (New Brunswick, NJ, 1988).

[17] Joel Spencer. Zero-one laws with variable probability. *J. Symbolic Logic*, 58(1):1–14, 1993.

[18] Peter Winkler. A counterexample in the theory of random orders. *Order*, 5(4):363–368, 1989.

[19] Peter Winkler. Random structures and zero-one laws. In *Finite and infinite combinatorics in sets and logic (Banff, AB, 1991)*, volume 411 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 399–420. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

Índice Remissivo