Números de Ramsey Induzidos e Semi-induzidos

Marcio Grossi de Almeida

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

- São Paulo, Junho de 2000 -

Números de Ramsey Induzidos e Semi-induzidos

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Marcio Grossi de Almeida
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de Junho de 2000.

Banca examinadora:

Membros Titulares

Prof. Dr. Yoshiharu Kahayakawa (Presidente)	IME-USP
Prof. Dr. Paulo Feofiloff	IME-USP
Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira	IMPA

Membros Suplentes

Prof. Dr. Piotr Koszmider	IME-USP
Prof. Dr. Nicolau Corção Saldanha	IMPA

Agradecimentos

Aos meus pais e familiares, pelo apoio incondicional durante os meus estudos,

Aos professores Paulo Feofiloff e Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, pela leitura cuidadosa deste texto e pelas valiosas críticas e sugestões,

Ao professor Yoshiharu Kahayakawa, pelas grandes idéias, pela paciência e pela amizade que tanto contribuíram para a realização deste trabalho,

meu sincero agradecimento.

Marcio Grossi de Almeida

Resumo

Dados dois grafos G e H quaisquer, chamamos de *número de Ramsey semi-induzido* $r_{\text{sind}}(G, H)$ e de *número de Ramsey semi-induzido para arestas* $\hat{r}_{\text{sind}}(G, H)$, respectivamente, a menor ordem e o menor número de arestas possíveis para um grafo Γ com a propriedade de que sempre que suas arestas são coloridas com as cores vermelha e azul, ou Γ possui uma cópia vermelha de G ou Γ possui uma cópia azul *induzida* de H. Para o caso em que T é uma árvore e H é um grafo qualquer, nós mostramos que $r_{\text{sind}}(T, H) \leq (t-1)h^2$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H) \leq [(t-1)h]^2|E(H)|$, se $h = |V(H)| \geq 2$ e $t = |V(T)| \geq 2$. No caso em que T possui grau máximo limitado, nós mostramos que, para todo $\varepsilon > 0$, se $h = |V(H)| \geq h_0(\varepsilon)$, $t = |V(T)| \geq t_0(\varepsilon)$ e $d = \Delta(T)$ então $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H) < cd^{9/2}(h^2t^{3/2})^{1+\varepsilon}|E(H)|$, onde c é uma constante que depende somente de ε.

Nós também investigamos o *número de Ramsey induzido* $r_{\text{ind}}(G, H)$, que é definido como sendo a menor ordem possível para um grafo Γ com a propriedade de que sempre que suas arestas são coloridas com as cores vermelha e azul, ou Γ possui uma cópia vermelha *induzida* de G ou Γ possui uma cópia azul *induzida* de H. Nós mostramos que se o grafo G pertence à classe $\mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ — que equivale à classe dos grafos *simples* definida em Erdős e Hajnal [**5**] — então $r_{\text{ind}}(G, H) < |V(H)|^f$, onde f é uma constante que depende somente de G.

Abstract

For any given graphs G and H, we define the *semi-induced Ramsey number* $r_{\text{sind}}(G, H)$ and the *edge semi-induced Ramsey number* $\hat{r}_{\text{sind}}(G, H)$ as the smallest order and the smallest number of edges of a graph Γ having the property that, whenever its edges are coloured red and blue, either a red copy of G arises or else a blue *induced* copy of H arises. When T is a tree and H is a graph, we show that $r_{\text{sind}}(T, H) \leq (t-1)h^2$ and $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H) \leq [(t-1)h]^2|E(H)|$, where $h = |V(H)| \geq 2$ and $t = |V(T)| \geq 2$. When T has bounded maximum degree, we show that, for any $\varepsilon > 0$, if we have $h = |V(H)| \geq h_0(\varepsilon)$, $t = |V(T)| \geq t_0(\varepsilon)$ and $d = \Delta(T)$ then $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H) < cd^{9/2}(h^2t^{3/2})^{1+\varepsilon}|E(H)|$, where c is a constant that only depends on ε.

We also investigate the *induced Ramsey number* $r_{\text{ind}}(G, H)$, which is defined as the smallest order of a graph Γ having the property that, whenever its edges are coloured red and blue, either a red *induced* copy of G arises or else a blue *induced* copy of H arises. We show that if G belongs to a class of graphs called $\mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ — which is the Erdős and Hajnal [**5**] class of simple graphs — then $r_{\text{ind}}(G, H) < |V(H)|^f$, where f is a constant that only depends on G.

Sumário

Introdução

1. Teoria de Ramsey: algumas definições e notações

Nesta seção, apresentamos algumas definições e notações utilizadas neste texto. Todos os grafos mencionados neste texto não possuem *loops* e são *não-orientados*. A notação básica adotada, extraída em quase toda sua totalidade de Diestel [**4**], é dada a seguir.

Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto de números naturais incluindo o número zero e pomos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dado um conjunto X qualquer, denotamos por $|X|$ a sua cardinalidade. Dado um número real x qualquer, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x e por $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x. Um conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de subconjuntos disjuntos de um conjunto A é uma *partição* de A se $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Se $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ é uma partição de A e $A_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq k$ dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *partição própria* de A. Dado um conjunto A definimos $[A]_i^j := \{S \subseteq A \colon i \leq |S| \leq j\}$ e escrevemos $[A]^k$ no lugar de $[A]_k^k$.

$\mathbb{N}$
$\mathbb{N}^*$
$|X|$
$\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$
partição
partição própria
$[A]_i^j$
$[A]^k$

Chamamos de *grafo* um par $G = (V, E)$ de conjuntos satisfazendo $E \subseteq [V]^2$; observe que estamos assumindo que os elementos de E são *subconjuntos* de V com cardinalidade igual a 2. Os elementos de V são chamados de *vértices* do grafo G e os elementos de E são chamados de *arestas* do grafo G. Definimos como $\overline{G} := (V, [V]^2\backslash E)$ o grafo *complementar* de G.

grafo
vértices
arestas
$\overline{G}$

Se H é um grafo, $V(H)$ denota o seu conjunto de vértices (escrevemos $v(H)$ no lugar de $|V(G)|$), $E(H)$ denota o seu conjunto de arestas (escrevemos $e(H)$ no lugar de $|E(H)|$). Chamamos também $v(H)$ de *ordem* do grafo H.

$V(H)$, $v(H)$
$E(H)$, $e(H)$
ordem

Dizemos que $M \subseteq E(H)$ é um *emparelhamento* em H se as arestas em M são duas a duas disjuntas; denotamos por $\nu(H)$ a cardinalidade de um emparelhamento de tamanho máximo em H.

emparelhamento
$\nu(H)$

Se $v \in V(H)$, dizemos que um vértice $v' \in V(H)\backslash\{v\}$ é *adjacente* a (ou *vizinho* de) v em H se $\{v, v'\} \in E(H)$; denotamos $\Gamma_H(v) = \{v' \in V(H) \colon v' \text{ é vizinho de } v \text{ em } H\}$ como a *vizinhança* de v no grafo H e pomos $d_H(v) = |\Gamma_H(v)|$. Chamamos $d_H(v)$ de *grau* de v no grafo H. Se $X \subseteq V(H)$, pomos $\Gamma_H(X) = \bigcup_{v \in X} \Gamma_H(v)$. Denotamos o *grau mínimo de H* por $\delta(H) = \min\{d_H(v) \colon v \in V(H)\}$ e o *grau máximo de H* por $\Delta(H) = \max\{d_H(v) \colon v \in V(H)\}$.

adjacente, vizinho
$\Gamma_H(v)$
vizinhança, $d_H(v)$
grau, $\Gamma_H(X)$
grau mínimo de H, $\delta(H)$
grau máximo de H, $\Delta(H)$

Se G e H são grafos tais que $V(G) \subseteq V(H)$ e $E(G) \subseteq E(H)$, dizemos que G é um *subgrafo* de H e escrevemos $G \subseteq H$. Se G é um subgrafo de H tal

subgrafo, $G \subseteq H$

subgrafo induzido
$H[X]$

que $E(G) = \{e \in E(H)\colon e \subseteq V(G)\}$, dizemos que G é um *subgrafo induzido* de H. Dado $X \subseteq V(H)$, definimos $H[X]$, o grafo gerado pelo conjunto de vértices X em H, como sendo o grafo dado por $(X, \{e \in E(H)\colon e \subseteq X\})$. Se G e H são grafos tais que existe uma função $f\colon V(G) \mapsto V(H)$ bijetora que satisfaz $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ se e somente se $\{f(v_1), f(v_2)\} \in E(H)$ para todo $\{v_1, v_2\} \in [V(G)]^2$ então dizemos que o grafo G é *isomorfo* ao grafo H e que f é um *isomorfismo* entre G e H.

grafos isomorfos
isomorfismo
K^n
I^n

Denotamos por K^n o grafo completo — i.e. com todas as arestas possíveis — com n vértices e por I^n o grafo com n vértices e sem nenhuma aresta. Se P é um grafo da forma $P = (\{v_1, \ldots, v_k\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$, dizemos que P é um *caminho* e denotaremos P por P^k, onde $k = v(P)$. Em particular, se $P \subseteq G$, dizemos que P é um *caminho entre v_1 e v_k em G*. Se G é um grafo tal que para quaisquer dois vértices v, $v' \in V(G)$ existe um caminho entre v e v' em G, então dizemos que G é um grafo *conexo*. Se T é um grafo tal que para quaisquer dois vértices v, $v' \in V(T)$ existe *um e somente um* caminho entre v e v' em T, então dizemos que T é uma *árvore*. Se T é uma árvore e $v \in V(T)$ é tal que $d_T(v) = 1$, dizemos que o vértice v é uma *folha* de T.

caminho, P^k
caminho entre v_1 e v_k em G
grafo conexo
árvore
folha

Apresentamos abaixo as definições e notações que são específicas da teoria de Ramsey.

$\Gamma \longrightarrow (G, H)$

Dados três grafos Γ, G e H, escrevemos $\Gamma \longrightarrow (G, H)$ se, em qualquer coloração das arestas de Γ com as cores vermelha e azul, podemos encontrar um subgrafo vermelho de Γ isomorfo a G ou um subgrafo azul de Γ isomorfo a H. De forma análoga, definimos $\Gamma \overset{\text{ind}}{\longrightarrow} (G, H)$, com a diferença que, neste caso, exigimos que os subgrafos de Γ isomorfos a H ou a G na definição acima sejam *induzidos* em Γ.

$\Gamma \overset{\text{ind}}{\longrightarrow} (G, H)$

Parte de nossa pesquisa está focada em uma relação "intermediária" às duas descritas acima. Assim como $\Gamma \overset{\text{ind}}{\longrightarrow} (G, H)$, temos que $\Gamma \overset{\text{s,i}}{\longrightarrow} (G, H)$ difere da relação $\Gamma \longrightarrow (G, H)$ somente pelo fato de que é exigido que *apenas* o subgrafo de Γ isomorfo a H seja induzido em Γ. A notação "s, i" denota que exigimos G como *subgrafo* de Γ e H como subgrafo *induzido* de Γ. Observe que é fácil verificar que

$\Gamma \overset{\text{s,i}}{\longrightarrow} (G, H)$

$$(1) \qquad \Gamma \overset{\text{ind}}{\longrightarrow} (G, H) \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \overset{\text{s,i}}{\longrightarrow} (G, H) \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \longrightarrow (G, H).$$

Um teorema clássico de Ramsey [**15**] mostra que, para qualquer par de grafos (G, H), existe um grafo Γ tal que $\Gamma \longrightarrow (G, H)$. Desta forma, dado um par de grafos (G, H), chamaremos de *número de Ramsey* $r(G, H)$ a menor ordem possível para um grafo Γ tal que $\Gamma \longrightarrow (G, H)$. Mais formalmente, temos $r(G, H) = \min\{|V(\Gamma)|\colon \Gamma \longrightarrow (G, H)\}$. No caso "diagonal", escrevemos $r(H)$ no lugar de $r(H, H)$. Também costumamos escrever $r(n)$ no lugar de $r(K^n)$. Da mesma forma, definimos o *número de Ramsey para arestas* como $\hat{r}(G, H) = \min\{|E(\Gamma)|\colon \Gamma \longrightarrow (G, H)\}$. Pomos, também, $\hat{r}(H) = \hat{r}(H, H)$ e $\hat{r}(n) = \hat{r}(K^n)$.

$r(G, H)$
$r(H)$, $r(n)$
$\hat{r}(G, H)$
$\hat{r}(H)$, $\hat{r}(n)$

Um outro resultado clássico descoberto independentemente por Deuber [**3**], Erdős, Hajnal e Pósa [**6**] e Rödl [**16**] garante que, para qualquer par de grafos (G, H), existe um grafo Γ tal que $\Gamma \xrightarrow{\text{ind}} (G, H)$. Assim, dado um par de grafos (G, H), temos que a noção de número de Ramsey $r(G, H)$ pode ser estendida para o *número de Ramsey induzido* $r_{\text{ind}}(G, H)$, trocando-se a $r_{\text{ind}}(G, H)$
relação $\longrightarrow$ por $\xrightarrow{\text{ind}}$. Devido a (1), podemos também estender esta noção para o *número de Ramsey semi-induzido* $r_{\text{sind}}(G, H)$, trocando a relação $\longrightarrow$ $r_{\text{sind}}(G, H)$
por $\xrightarrow{\text{s,i}}$. Analogamente, estendemos a noção de $\hat{r}(G, H)$ para $\hat{r}_{\text{ind}}(G, H)$ e $\hat{r}_{\text{ind}}(G, H)$
$\hat{r}_{\text{sind}}(G, H)$. $\hat{r}_{\text{sind}}(G, H)$

Para finalizar esta seção, observamos que, para quaisquer grafos G e H, as desigualdades

$$r(G, H) \leq r_{\text{sind}}(G, H) \leq r_{\text{ind}}(G, H)$$

$$\text{e} \tag{2}$$

$$\hat{r}(G, H) \leq \hat{r}_{\text{sind}}(G, H) \leq \hat{r}_{\text{ind}}(G, H).$$

decorrem imediatamente de (1) e das definições acima.

2. Alguns resultados na teoria de Ramsey

Esta seção traz alguns resultados na teoria de Ramsey que são relevantes para os focos de estudo desta dissertação.

2.1. Números de Ramsey para vértices e arestas. Como visto na seção anterior, Ramsey em [**15**] provou um resultado que garante a existência de $r(n)$ para todo n inteiro positivo. Este resultado não só garante a existência de $r(n)$, como também fornece um limitante superior, a saber, $r(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}$. Em 1947 Erdős provou um resultado que mostra que $r(n)$ é limitado inferiormente por $2^{n/2}$ quando n é um inteiro maior ou igual a 3. Os melhores limitantes de $r(n)$ conhecidos atualmente implicam que

$$2^{1/2} \leq \liminf_{n\to\infty} r(n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} r(n)^{1/n} \leq 4. \tag{3}$$

Temos, assim, que a taxa precisa do crescimento exponencial de $r(n)$ é ainda desconhecida. Saber se $\lim_{n\to\infty} r(n)^{1/n}$ existe e, no caso positivo, determinar o seu valor, são problemas importantes que permanecem em aberto na área.

Apesar de o número de Ramsey apresentar um crescimento exponencial para grafos completos, é razoável se esperar que, para um grafo H com poucas arestas, $r(H)$ seja menor que $r(v(H))$. De fato, existem algumas classes relativamente grandes de grafos para as quais o número de Ramsey apresenta um crescimento polinomial. Como exemplo, apresentamos a seguir um resultado sobre uma classe de pares de grafos que, em particular, está no primeiro foco de estudo desta dissertação. O teorema abaixo, extraído de Chvátal [**2**], constitui um dos raros casos onde o número de Ramsey de uma classe de grafos é conhecido com exatidão.

TEOREMA 1. *Para toda árvore T com n vértices, temos $r(T, K^m) = 1 + (n-1)(m-1)$.*

Um outro problema também considerado na literatura consiste na versão para arestas do problema descrito acima. A partir do Teorema 1 é fácil estabelecer um limitante superior "trivial" para $\hat{r}(T_n, K^m)$, onde T_n é uma árvore qualquer de ordem n:

$$\hat{r}(T_n, K^m) \leq \binom{r(T_n, K^m)}{2} < \frac{(nm)^2}{2}.$$

A seguir, temos um resultado extraído de Ke [**10**] que, através da utilização de métodos probabilísticos e uma técnica sofisticada de imersão de árvores devida a Friedman e Pippenger[1] [**7**], fornece um limitante superior melhor para este problema quando a árvore T_n possui grau limitado.

TEOREMA 2. *Se d é um inteiro positivo fixo e n e m são inteiros positivos satisfazendo $m^\beta < n < m^\gamma$ para duas constantes positivas β e γ, então, para n suficientemente grande, toda árvore $T_{n,d}$ de ordem n e grau máximo d satisfaz*

$$c_1 m^2 n \leq \hat{r}(T_{n,d}, K^m) \leq c(d, \beta, \gamma) m^2 n \log n,$$

onde c_1 é uma constante absoluta e $c(d, \beta, \gamma)$ depende apenas de d, β e γ.

Como o nosso primeiro foco de estudo tem por objetivo determinar limitantes superiores para $r_{\text{sind}}(T_n, H)$, $\hat{r}_{\text{sind}}(T_n, H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T_{n,d}, H)$ — para o caso em que H é um grafo qualquer — temos, pela Equação 2, que os Teoremas 1 e 2 funcionam como "referenciais" para o nosso trabalho.

2.2. Números de Ramsey induzidos. O caso *induzido* do problema tratado nos Teoremas 1 e 2 também faz parte do nosso foco de interesse. Uma diferença está no fato que os resultados listados aqui referem-se a um limitante superior para $r_{\text{ind}}(T, H)$ e $\hat{r}_{\text{ind}}(T, H)$, onde T é uma árvore e H é um grafo *qualquer*.

Apesar da dificuldade trazida pelo fato de exigirmos cópias induzidas de T e H, é conhecido que tanto $r_{\text{ind}}(T, H)$ como $\hat{r}_{\text{ind}}(T, H)$ apresentam crescimento polinomial em relação a $v(H)$ e $v(T)$. Abaixo segue um teorema de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] que estabelece um limitante superior para $r_{\text{ind}}(T, H)$.

TEOREMA 3. *Dados uma árvore T e um grafo arbitrário H, temos*

$$r_{\text{ind}}(T, H) \leq c t^2 h^4 \left(\frac{\ln(th^2)}{\ln \ln \ln(th^2)} \right)^2, \tag{4}$$

onde $t = v(T)$, $h = v(H)$ e c é uma constante absoluta.

[1] O enunciado e a demonstração do teorema de Friedman e Pippenger encontram-se no Apêndice C. Este resultado também é utilizado na demonstração de um limitante superior para $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H)$, onde T é uma árvore de grau máximo limitado e H é um grafo qualquer, no Capítulo 1.

Apesar de não constar explicitamente como um resultado, a demonstração do Teorema 3 em Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] também fornece um limitante superior para $\hat{r}_{\text{ind}}(T,H)$, que enunciamos a seguir.

TEOREMA 4. *Dados uma árvore T e um grafo arbitrário H, temos*

$$\hat{r}_{\text{ind}}(T,H) \leq ct^3h^4\left(\frac{\ln(th^2)}{\ln\ln\ln(th^2)}\right)^3 e(H), \tag{5}$$

onde $t = v(T)$, $h = v(H)$ e c é uma constante absoluta.

Assim como os Teoremas 1 e 2, temos, pela Equação 2, que os Teoremas 3 e 4 funcionam como "referenciais" dentro do nosso primeiro foco de estudo.

Já o nosso segundo foco de estudo está voltado para um outro problema clássico da teoria de Ramsey. Considere o problema de se estimar $f(n) = \max r_{\text{ind}}(H)$, onde o máximo é sobre *todos* os grafos H de ordem n.

Um resultado não publicado de Rödl [**8**] fornece que $f(n) \leq 2^{2^{n^{1+o(1)}}}$. O seguinte problema é devido a Graham e Rödl.

PROBLEMA 5. *Existe uma contante C para a qual vale que $f(n) \leq C^n$?*

Rödl provou através de seus métodos em [**16**] que $r_{\text{ind}}(H) \leq C^{v(H)}$ para alguma constante C se H é um grafo bipartido. Luczak e Rödl [**12**] provaram recentemente que $r_{\text{ind}}(H) \leq v(H)^d$ para alguma constante $d = d(\Delta(H))$ que depende apenas do grau máximo $\Delta(H)$ de H, resolvendo assim positivamente um problema levantado por Trotter [**8**]. Observe que se a resposta ao Problema 5 for positiva, temos que o resultado, a menos pelo valor da constante C, é o melhor possível, pois existem grafos H para os quais $r_{\text{ind}}(H)$ é exponencial em $v(H)$ (basta tomar, por exemplo, o grafo K^n).

Antes de prosseguirmos, vamos introduzir mais algumas definições. Dados dois grafos G e H quaisquer, denotamos por $I(G,H)$ o grafo obtido pela união *disjunta* de uma cópia de G com uma cópia de H. Analogamente, denotamos por $K(G,H)$ o grafo $I(G,H)$ adicionado de todas as arestas possíveis entre as cópias de G e H. Agora, seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos qualquer. Considere $\mathcal{EH}_0(\mathcal{G}) := \mathcal{G}$ e, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, defina[2] $I(G,H)$ $K(G,H)$ $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$

$$\begin{aligned}\mathcal{EH}_i(\mathcal{G}) := \big\{G\colon \exists G_1, G_2 \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G}) \text{ tal que}\\ G = K(G_1,G_2) \text{ ou } G = I(G_1,G_2)\big\}.\end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{EH}(\mathcal{G})$ a *menor* classe de grafos que contém $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que se $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ com $i \in \mathbb{N}^*$, então existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$. $\mathcal{EH}(\mathcal{G})$

[2]Denominamos esta classe de grafos por $\mathcal{EH}$ devido à semelhança de sua construção com a da classe de grafos *simples* definida em Erdős e Hajnal [**5**].

Tratando de um caso particular do Problema 5, Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] verificaram que o crescimento de $r_{\text{ind}}(G,H)$ é polinomial em $v(H)$ se $G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

Teorema 6. *Para todo grafo $G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$ existe uma constante $f = f(G)$ que depende apenas de G tal que, para todo grafo H, temos*

$$r_{\text{ind}}(G,H) \leq v(H)^f.$$

$G(v \to H)$

Dados dois grafos G e H e um vértice $v \in V(G)$ quaisquer, denotamos por $G(v \to H)$ o grafo obtido de G pela substituição de v por uma cópia do grafo H e pela adição, para todo $v' \in V(G)\backslash\{v\}$ com $\{v, v'\} \in E(G)$, de todas as arestas possíveis entre os vértices da cópia do grafo H e v'. Seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos qualquer. Considere $\mathcal{EH}_0^{\text{var}}(\mathcal{G}) := \mathcal{G}$ e, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, defina

$\mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\mathcal{G})$

$$\mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\mathcal{G}) := \Big\{G \colon \exists G_1, G_2 \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j^{\text{var}}(\mathcal{G}) \text{ e } v \in G_1 \text{ tais que } G = G_1(v \to G_2)\Big\}.$$

$\mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$

Analogamente, denotamos por $\mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$ a *menor* classe de grafos que contém $\mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\mathcal{G})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Na segunda parte desta dissertação nós utilizamos a mesma técnica empregada na demonstração do Teorema 6 em [**11**], juntamente com uma idéia adicional extraída de Alon, Pach e Solymosi [**1**] e mostramos que $r_{\text{ind}}(G,H)$ também possui crescimento polinomial em $v(H)$ se G é um grafo pertencente a $\mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ fixo. Infelizmente descobrimos, após a conclusão destes estudos, que as classes $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ e $\mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ são equivalentes[3]. Desta forma, temos que o nosso estudo na segunda parte desta dissertação apenas fornece uma demonstração diferente para o Teorema 6.

[3]Veja o Teorema 39 do Apêndice D.

CAPÍTULO 1

Os Resultados para o Caso Semi-Induzido

1. Introdução

O nosso objetivo neste capítulo consiste no estudo de limitantes superiores para os números $r_{\text{sind}}(T,H)$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T,H)$, onde T é uma árvore e H é um grafo qualquer. Abaixo segue o primeiro resultado deste capítulo.

TEOREMA 7. *Suponha que uma árvore T e um grafo H sejam dados. Se $h = v(H) \geq 2$ e $t = v(T) \geq 2$ então*

$$r_{\text{sind}}(T,H) \leq (t-1)h^2 \quad e \quad \hat{r}_{\text{sind}}(T,H) \leq [(t-1)h]^2 e(H).$$

O segundo resultado deste capítulo trata de um caso especial do Teorema 7, onde T possui grau máximo limitado.

TEOREMA 8. *Suponha que uma árvore T e um grafo H sejam dados. Para todo $\varepsilon > 0$ existem constantes positivas $c = c(\varepsilon)$, $h_0 = h_0(\varepsilon) \geq 1$ e $t_0 = t_0(\varepsilon) \geq 1$ que dependem apenas de ε tais que se $h = v(H) \geq h_0$, $t = v(T) \geq t_0$ e $d = \Delta(T)$ então*

$$\hat{r}_{\text{sind}}(T,H) < cd^{9/2}(h^2 t^{3/2})^{1+\varepsilon} e(H).$$

Na demonstração do Teorema 8 utilizamos um grafo aleatório que é construído sobre um plano projetivo finito. Para o leitor não familiarizado com planos projetivos finitos, incluímos, no Apêndice A, uma breve introdução cobrindo as propriedades mais relevantes destas estruturas.

O restante deste capítulo está basicamente dividido em duas partes. A Seção 2 traz a demonstração do Teorema 7 e a Seção 3 traz a demonstração do Teorema 8.

2. A prova do Teorema 7

Esta seção está dividida em duas partes. A Subseção 2.1 contém alguns lemas auxiliares e a Subseção 2.2 traz a demonstração do Teorema 7.

2.1. Os Lemas Auxiliares. Apresentamos, nesta subseção, três lemas auxiliares que serão utilizados na prova do Teorema 7 na Subseção 2.2.

LEMA 9. *Seja G um grafo não-vazio. Se T é uma árvore com $v(T) \leq \delta(G) + 1$ então existe $\bar{T} \subseteq G$ isomorfo a T.*

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é feita por indução em $v(T)$.

- Caso 1 ($v(T) \leq 1$):

  Se $v(T) = 0$, temos $T \subseteq G$ e não há o que demonstrar.
  Se $v(T) = 1$, temos que T é a árvore constituída por apenas um vértice. Como G é um grafo não-vazio, temos claramente $v(G) > 0$ e, portanto, existe $\bar{T} \subseteq G$ isomorfo a T.

- Caso 2 ($v(T) > 1$):

  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que $v(T)$. Sejam $v \in V(T)$ uma folha de T e $e = \{u, v\} \in E(T)$ a aresta de $E(T)$ que incide em v. Tome $T' = (V(T)\backslash\{v\}, E(T)\backslash\{e\})$ — T' é a árvore obtida pela remoção de v em T.
  Como $v(T') < v(T)$ temos, pela hipótese de indução, que existe $\bar{T'} \subseteq G$ isomorfo a T'. Seja $\bar{u} \in V(\bar{T'})$ o vértice correspondente a u em um isomorfismo qualquer entre T' e $\bar{T'}$.
  Como $v(\bar{T'}) = v(T') < v(T) \leq \delta(G) + 1$, temos $v(\bar{T'}) \leq \delta(G)$ e portanto vale $d_{\bar{T'}}(\bar{u}) \leq \delta(G) - 1$. Mas $d_G(\bar{u}) \geq \delta(G)$, o que implica $\Gamma_G(\bar{u})\backslash\Gamma_{\bar{T'}}(\bar{u}) \neq \emptyset$. Tomando $\bar{v} \in \Gamma_G(\bar{u})\backslash\Gamma_{\bar{T'}}(\bar{u})$ qualquer e $\bar{e} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$, temos que $\bar{T} = (V(\bar{T'})\cup\{\bar{v}\}, E(\bar{T'})\cup\{\bar{e}\})$ é um subgrafo de G isomorfo a T.

□

O próximo lema, que também é utilizado na prova do Teorema 8 na próxima seção, garante a existência de um subgrafo com o grau mínimo limitado inferiormente dentro de um grafo arbitrário.

Lema 10. *Todo o grafo não-vazio G possui um subgrafo G' com $\delta(G') \geq e(G)/v(G)$.*

Demonstração: Suponha G nas condições do enunciado e seja $\mathcal{D} = (G_0, G_1, \ldots, G_k)$ uma seqüência maximal de subgrafos de G que obedece as seguintes restrições:

- $G_0 = G$;
- para todo $0 \leq i < k$ existe $v_i \in V(G_i)$ tal que $d_{G_i}(v_i) < e(G)/v(G)$, $V(G_{i+1}) = V(G_i)\backslash\{v_i\}$ e $E(G_{i+1}) = E(G_i)\backslash\{e \in E(G_i) \colon v_i \in e\}$.

Observe que $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k$. Note também que, para $0 \leq i < k$, temos $v(G_i) - v(G_{i+1}) = 1$ e $e(G_i) - e(G_{i+1}) < e(G)/v(G)$. Desta forma, temos que para $0 < i \leq k$ vale

$$v(G_0) - v(G_i) = i \tag{6}$$

e

$$e(G_0) - e(G_i) < i \times e(G)/v(G). \tag{7}$$

Observe que (6) garante $k \leq v(G_0)$. Mas note que não podemos ter $k = v(G_0)$ pois, neste caso, teríamos $v(G_k) = v(G_0) - k = 0$ e por (7) teríamos $e(G_k) > e(G_0) - k \times e(G)/v(G) = 0$, o que seria um absurdo.

Desta forma temos $k < v(G_0)$ e, por (6), segue que $v(G_k) > 0$. Fazendo $G' = G_k$ temos, pela maximalidade de $\mathcal{D}$, que $\delta(G') \geq e(G)/v(G)$. $\square$

Antes de apresentarmos o próximo lema, vamos generalizar a noção de $G(v \to H)$ enunciada na introdução deste texto. Suponha que sejam dados dois grafos G e H e um conjunto $V = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ com $k = |V|$ quaisquer. Considere $G_0 = G$ e, para todo $1 \leq i \leq k$, faça $G_i = G_{i-1}(v_i \to H)$. Denotamos por $G(V \to H)$ o grafo G_k obtido ao final do procedimento descrito acima. $G(V \to H)$

O lema que segue abaixo, que também é utilizado na demonstração dos Lemas 22 e 23 no próximo capítulo, é em sua essência o Lema 13 de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**].

Lema 11. *Suponha $G = H(V(H) \to I)$, onde H é um grafo que satisfaz $v(H) \geq 2$ e I é um grafo qualquer. Se as arestas de G forem coloridas com as cores vermelha e azul de forma que não haja uma cópia azul induzida de H em G então G possui pelo menos $v(I)^2$ arestas vermelhas.*

Demonstração: Sejam G, H e I nas condições do enunciado. Observe que se $v(I) = 0$ o resultado é imediato. Suponha, então, $v(I) > 0$.

Para todo $v \in V(H)$ considere $I_v \subseteq V(G)$ o conjunto de vértices que induz uma cópia do grafo I em G e que corresponde à "explosão" do vértice v no grafo original H. Observe que $\mathcal{I} = \{I_v : v \in V(H)\}$ é uma partição própria de $V(G)$.

Agora considere $\mathcal{F} = \{V \subseteq V(G) : \forall v \in V(H),\ |V \cap I_v| = 1\}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é a família de todos os subconjuntos de $V(G)$ que possuem exatamente um elemento em comum com cada conjunto $I_v \in \mathcal{I}$. Observe que $|\mathcal{F}| = v(I)^{v(H)}$ e que para todo $V \in \mathcal{F}$ temos que $G[V]$, o grafo induzido por V em G, é isomorfo a H. Considere também $E = \{e \in E(G) : \exists V \in \mathcal{F} \text{ tal que } e \in E(G[V])\} \subseteq E(G)$, ou seja, $E = E(G) \setminus \bigcup_{v \in V(H)} E(G[I_v])$. Note que para toda aresta $e \in E$ temos

$$\big|\{V \in \mathcal{F} : e \in G[V]\}\big| = v(I)^{v(H)-2}. \tag{8}$$

Agora suponha que as arestas de G sejam coloridas com as cores vermelha e azul de forma que não haja uma cópia azul *induzida* de H em G. Vamos mostrar que G possui pelo menos $v(I)^2$ arestas vermelhas.

De fato, suponha que a afirmação anterior seja falsa e que, portanto, o número de arestas vermelhas em G seja inferior a $v(I)^2$. Observe então que, por (8), *menos* de $v(I)^2 \times v(I)^{v(H)-2}$ conjuntos de $\mathcal{F}$ induzem em G um grafo que contenha alguma aresta na cor vermelha. Como $|\mathcal{F}| = v(I)^{v(H)}$, temos que existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $G[V]$ possui somente arestas azuis. Mas isto contradiz a nossa hipótese sobre a coloração das arestas de G pois $G[V]$ é isomorfo a H. $\square$

2.2. A prova do Teorema 7. O Teorema 7 decorre de uma aplicação dos três lemas auxiliares vistos na subseção anterior.

Demonstração do Teorema 7: Sejam T, H, t e h como no enunciado do Teorema 7 e considere $G = H(V(H) \to I^{(t-1)h})$. Observe que $v(G) = (t-1)h^2$ e $e(G) = [(t-1)h]^2 e(H)$. Vamos mostrar que $G \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H)$.

Suponha que as arestas de G sejam coloridas com as cores vermelha e azul de forma que não haja uma cópia azul *induzida* de H em G. Vamos mostrar que existe $\bar{T} \subseteq G$ isomorfo a T e composto apenas por arestas vermelhas.

Pelo Lema 11 temos que existe um conjunto E_R de arestas vermelhas de G satisfazendo $|E_R| \geq [(t-1)h]^2$. Considere o grafo $R = (V(G), E_R) \subseteq G$. Relembrando que $v(G) = (t-1)h^2$ temos, pelo Lema 10, que existe $R' \subseteq R$ tal que $\delta(R') \geq t-1$. Como $v(T) = t \leq \delta(R') + 1$ temos, pelo Lema 9, que existe $\bar{T} \subseteq R'$ isomorfo a T.

Desta forma temos $G \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H)$ e, portanto, segue que $r_{\text{sind}}(T, H) \leq v(G) = (t-1)h^2$ e $\hat{r}_{\text{sind}}(T, H) \leq e(G) = [(t-1)h]^2 e(H)$. □

3. A prova do Teorema 8

Esta seção está dividida em quatro subseções. Na Subseção 3.1 apresentamos a construção do grafo aleatório R, que serve de base para o desenvolvimento do nosso trabalho no resto desta seção. A Subseção 3.2 enuncia o Lema 13 que, como veremos, implica o Teorema 8. Na Subseção 3.3 enunciamos e provamos o Lema 14, que é um resultado auxiliar necessário para a demonstração do Lema 13. Por fim, a Subseção 3.4 traz a demonstração do Lema 13.

É importante salientarmos que a técnica de demonstração que utilizamos para provar o Teorema 8 é fortemente baseada na técnica de demonstração empregada na prova do Teorema 3 encontrada em Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**].

3.1. A construção do grafo aleatório R. Sejam H, T, h, t, d e ε dados nas condições do Teorema 8. Considere

$$q = \left\lceil \sqrt{8(d+2)^3 t \ln[(d+2)^3 h^2 t]^{3/2}} \right\rceil. \tag{9}$$

Suponha que seja dado um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ de ordem r satisfazendo

$$q^2h^2 \leq |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| = n = r^2 + r + 1 \leq 4q^2h^2. \tag{10}$$

Pelo Lema 30 do Apêndice A, temos que se r é uma potência de um número primo então existe um plano projetivo finito de ordem r. Para mostrarmos que existe um plano projetivo finito $\mathcal{P}$ de ordem r que satisfaz (10), considere o seguinte lema.

Lema 12. *Para todo inteiro $k \geq 2$, existe $m \geq 1$ tal que $k \leq 2^m < 2k$.*

Demonstração: Vamos mostrar, por indução em k, que a hipótese do enunciado vale para todos os valores de $k \geq 2$.

- Caso 1 ($k = 2$): basta tomar $m = 1$.

- Caso 2 ($k > 2$): suponha que a hipótese de indução valha para todos os valores menores de k e seja, então, um inteiro $m' \geq 1$ tal que $k - 1 \leq 2^{m'} < 2(k-1)$. Se $2^{m'} \geq k$ então basta tomar $m = m'$. Se $2^{m'} = k - 1$ temos $k < 2(k-1) = 2^{m'+1} < 2k$ e, portanto, basta tomar $m = m' + 1$.

$\square$

Por (9), sabemos que qh é um inteiro maior que 1. Desta forma, temos que o Lema 12 garante que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $qh \leq 2^m < 2qh$. Observe que o Lema 30 garante a existência de um plano projetivo finito $\mathcal{P}$ de ordem 2^m. Tomando $r = 2^m$, temos que $q^2h^2 \leq r^2 < r^2 + r + 1 < (r+1)^2 \leq 4q^2h^2$ e, portanto, o plano projetivo finito $\mathcal{P}$ de ordem $r = 2^m$ satisfaz (10).

Agora vamos descrever a construção do grafo aleatório $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$. Seja $L \in \mathcal{L}$ uma linha de $\mathcal{P}$. Escolha aleatoriamente q subconjuntos $W_1, \ldots, W_q \subseteq L$ dois a dois disjuntos, todos de cardinalidade h. Note que isto é possível pois, por (10), temos $qh < r + 1 = |L|$. Agora, insira aleatoriamente q cópias de H em L usando os subconjuntos W_i como os conjuntos de vértices destas cópias. Repita este procedimento para todas as linhas $L \in \mathcal{L}$, fazendo todas as escolhas aleatórias independentemente. O grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ é o grafo aleatório resultante. Observe que, pelo fato de estarmos construindo o grafo R sobre o plano projetivo finito $\mathcal{P}$, temos que todas as cópias do grafo H inseridas nas linhas de $\mathcal{P}$ pelo procedimento descrito acima são *induzidas*[1] no grafo resultante $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$.

Observe que a construção de $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ e (10) implicam

$$e(R) = q|\mathcal{L}|e(H) \leq 4q^3h^2e(H). \tag{11}$$

A partir de (9), podemos escolher $c' > 0$, $h_0' \geq 0$ e $t_0' \geq 0$ tais que se $h \geq h_0'$ e $t \geq t_0'$ então

$$q < \sqrt{12(d+2)^3 t \ln[(t+1)^3h^2t]} + 1 \leq c'd^{3/2}h^{2\varepsilon/3}t^{(1+\varepsilon)/2}. \tag{12}$$

De (11) e (12), temos que existem $c' > 0$, $h_0' \geq 0$ e $t_0' \geq 0$ tais que se $h \geq h_0'$ e $t \geq t_0'$ então

$$e(R) < 4c'^3d^{9/2}(h^2t^{3/2})^{1+\varepsilon}e(H). \tag{13}$$

[1] Veja a Definição 26 no Apêndice A para maiores detalhes.

3.2. Apresentação do Lema 13. Enunciamos abaixo o lema principal desta seção.

LEMA 13. *Existem constantes positivas $h''_0 \geq 1$ e $t''_0 \geq 1$ para as quais vale o que segue. Sejam H um grafo de ordem $h \geq h''_0$, $t \geq t''_0$ e $d \geq 0$ inteiros e $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito de ordem r que satisfaça (9) e (10) dados. Então, existe um grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ tal que*

$$R \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H) \tag{14}$$

para qualquer árvore T de ordem t e grau máximo d.

Observe que se tomarmos c', h'_0 e t'_0 como em (13) então o lema acima implica o Teorema 8 com $c = 4c'^3$, $h_0 = \max\{h'_0, h''_0\}$ e $t_0 = \max\{t'_0, t''_0\}$.

É interessante mencionar que a prova do Lema 13, de fato, fornece uma versão "universal" de (14). Ou seja, a árvore T em (14) pode ser substituída por $\mathcal{T}_d^t$, a família de todas as árvores de ordem t e grau máximo d. Dada uma coloração das arestas de R nas cores vermelha e azul, temos que se não existir uma cópia azul induzida de H em R então todas as árvores em $\mathcal{T}_d^t$ aparecerão como subgrafos de R com arestas vermelhas.

3.3. Um lema técnico sobre $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$. Sejam H um grafo, $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito e t e d inteiros como na Subseção 3.1 fixos. Considere o grafo aleatório $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ e seja $W \subseteq \mathcal{V}$. Vamos definir

$\rho_R(W)$

$$\begin{aligned} \rho_R(W) &:= \sum_{L \in \mathcal{L}} \nu(R[L \cap W]) \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \max\{|M| \colon M \subseteq E(R) \text{ emparelhamento} \\ &\qquad\qquad \text{tal que } \forall e \in M,\ e \subseteq L \cap W\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ou seja, temos que $\rho_R(W)$ nos fornece um limitante superior para $e(G)$ se $G \subseteq R$ é tal que $V(G) = W$ e as arestas de G formam um emparelhamento em *todas* as linhas de $\mathcal{L}$.

Temos, a seguir, o enunciado e a demonstração do Lema 14, que servirá de base para a prova do Lema 13.

LEMA 14. *Sejam H um grafo de ordem $h \geq 1$, $t \geq 1$ e $d \geq 0$ inteiros e $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito de ordem r que satisfaça (9) e (10) dados. Considere um grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$. Então*

$$\Pr\left\{\exists W \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t} \colon \frac{\rho_R(W)}{|W|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Em particular, existem constantes absolutas $h''_0 \geq 1$ e $t''_0 \geq 1$ tais que se $v(H) = h \geq h''_0$ e $t \geq t''_0$, então existe pelo menos um grafo $R' = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ que satisfaz

$$\frac{\rho_{R'}(W)}{|W|} \leq \frac{q}{2(d+2)}$$

para todo $W \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}$.

Demonstração: Suponha que H, h, t, d, $\mathcal{P}$ e R sejam dados nas condições do enunciado. Vamos definir, para todos $W \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}$, $L \in \mathcal{L}$ e $e \in [\mathcal{V}]^2$, as seguintes variáveis aleatórias:

$$X_{L,W}(R) := \nu(R[L \cap W]), \quad X_W(R) := \sum_{L \in \mathcal{L}} X_{L,W}(R) = \rho_R(W)$$

e

$$Y_e(R) := \begin{cases} 1, & \text{se } e \in E(R) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $W \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}$ qualquer. Observando que $n > 4(d+2)^2 h^2 t$, podemos estimar superiormente a esperança de X_W. De fato, temos

$$\begin{aligned}(16)\quad \mathrm{E}(X_W) &\leq \mathrm{E}(e(R[W])) = \mathrm{E}\Big(\sum_{e \in [W]^2} Y_e\Big) \\ &= \sum_{e \in [W]^2} \mathrm{E}(Y_e) = \sum_{e \in [W]^2} \frac{e(H)q}{\binom{r+1}{2}} = \frac{\binom{|W|}{2} e(H)q}{\binom{r+1}{2}} \\ &\leq \frac{|W|^2 e(H)q}{n} < \frac{|W|h^2(d+2)tq}{n} < \frac{|W|q}{4(d+2)}.\end{aligned}$$

Observe que, pela construção de R, temos que X_W é uma soma de variáveis aleatórias *independentes*. Para toda linha $L \in \mathcal{L}$, defina

$$\xi_L(W) := \max\{X_{L,W}(R')\colon R' = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)\}.$$

Utilizando o Teorema 31 do Apêndice B e (16), temos:

$$\begin{aligned}(17)\quad \Pr\left\{\frac{X_W}{|W|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} &\leq \Pr\left\{X_W \geq \mathrm{E}(X_W) + \frac{|W|q}{4(d+2)}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{2(q|W|/[4(d+2)])^2}{\sum_{L \in \mathcal{L}} [\xi_L(W)]^2}\right\}.\end{aligned}$$

Vamos, agora, estimar um limitante superior para $\sum_{L \in \mathcal{L}} [\xi_L(W)]^2$. Suponha $L' \in \mathcal{L}$ fixo. Pela definição de $\xi_{L'}(W)$, temos $|L' \cap W| \geq 2\xi_{L'}(W)$. Como sabemos que $\xi_{L'}(W)$ é um número inteiro não-negativo, temos

$$(18)\quad \binom{|L' \cap W|}{2} \geq \binom{2\xi_{L'}(W)}{2} = \xi_{L'}(W)[2\xi_{L'}(W) - 1] \geq [\xi_{L'}(W)]^2.$$

Como sabemos que para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in W$ existe uma e somente uma linha $L'' \in \mathcal{L}$ tal que $\{x, y\} \subseteq L''$, temos

$$(19)\quad \binom{|W|}{2} = \sum_{L \in \mathcal{L}} \binom{|L \cap W|}{2}.$$

Aplicando (18) em (19), temos

$$\frac{|W|^2}{2} > \binom{|W|}{2} = \sum_{L\in\mathcal{L}} \binom{|L\cap W|}{2} \geq \sum_{L\in\mathcal{L}} [\xi_L(W)]^2. \tag{20}$$

Aplicando (20) em (17), temos

$$\begin{aligned}\Pr\left\{\frac{X_W}{|W|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} &\leq \exp\left\{-\frac{2(q|W|/[4(d+2)])^2}{\sum_{L\in\mathcal{L}}[\xi_L(W)]^2}\right\} \\ &< \exp\left\{-\frac{q^2}{4(d+2)^2}\right\} \leq \exp\left\{-2(d+2)t\ln[(d+2)^3h^2t]^{3/2}\right\},\end{aligned} \tag{21}$$

onde a última desigualdade decorre de (9).

Supondo n suficientemente grande, por (9) e (10) temos

$$[(d+2)^3h^2t]^{3/2} \geq n^{5/4}. \tag{22}$$

Aplicando (22) em (21), temos

$$\Pr\left\{\frac{X_W}{|W|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} < \exp\left\{\frac{-5(d+2)t\ln n}{2}\right\}$$

e, portanto, temos

$$\begin{aligned}&\Pr\left\{\exists W' \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t} : \frac{\rho_R(W')}{|W'|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} \\ &\leq \sum_{W'\in[\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}} \Pr\left\{\frac{X_{W'}}{|W'|} > \frac{q}{2(d+2)}\right\} < \sum_{W'\in[\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}} e^{-5[(d+2)t\ln n]/2} \\ &= \sum_{i=1}^{2(d+2)t} \binom{n}{i} e^{-5[(d+2)t\ln n]/2} \leq e^{-\ln n} \sum_{i=1}^{2(d+2)t} \binom{n}{i} e^{-2(d+2)t\ln n} \\ &\leq n^{-1} \sum_{i=1}^{2(d+2)t} \left(\frac{ne}{i}\right)^i e^{-2(d+2)t\ln n} \leq n^{-1} \sum_{i=1}^{2(d+2)t} \left(\frac{ne}{i}\right)^i e^{-i\ln n} \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^{2(d+2)t} \left(\frac{e}{i}\right)^i < n^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i}{i!} = \frac{e^e}{n} \to 0,\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. □

3.4. A prova do Lema 13. Em posse do Lema 14, podemos provar o Lema 13 que, como já sabemos, implica o Teorema 8.

Demonstração do Lema 13: Sejam h_0'' e t_0'' fixados nas condições do Lema 14. Suponha que um grafo H de ordem $h \geq h_0''$ e os inteiros $t \geq t_0''$ e $d \geq 0$ sejam dados. Seja $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito de ordem r que satisfaça (9) e (10). Considere um grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ tal que $\rho_R(W)/|W| \leq q/2(d+2)$ para todo $W \in [\mathcal{V}]_1^{2(d+2)t}$ — observe que o Lema 14 garante a existência de um grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, t, d)$ com esta propriedade. A seguir, vamos mostrar que, sob tais condições, temos

$$R \xrightarrow{\text{s,i}} (T, H) \tag{23}$$

para qualquer árvore T de ordem t e grau máximo d.

Para provar (23), considere uma coloração das arestas de R com as cores vermelha e azul tal que não haja uma cópia azul induzida de H em R. Vamos mostrar, então, que toda árvore T de ordem t e grau máximo d aparecerá como subgrafo de R com todas as suas arestas na cor vermelha.

Primeiro observe que, dentro de cada linha de $\mathcal{L}$, todas as q cópias disjuntas de H inseridas possuem pelo menos uma aresta vermelha. Desta forma, temos que existe uma coleção $\mathcal{E}$ de arestas vermelhas de R que possui exatamente $q|\mathcal{L}| = qn$ arestas e forma um emparelhamento dentro de cada linha de $\mathcal{L}$.

Seja $V_{\mathcal{E}} = \{v \in \mathcal{V} \colon \exists\ e \in \mathcal{E},\ v \in e\}$ e considere o grafo $G = (V_{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$. Como $|V_{\mathcal{E}}| \leq |\mathcal{V}| = n$, o Lema 10 garante a existência de um grafo $G' \subseteq G$ tal que $\delta(G') \geq q$.

Vamos mostrar agora que G' contém todas as árvores de ordem t e grau máximo d. Para isso, vamos mostrar que para todo $W \subseteq V(G')$ com $|W| \leq 2t - 2$ temos $|\Gamma_{G'}(W)| \geq (d+1)|W|$. Com este resultado, poderemos aplicar o Teorema 34 do Apêndice C que garante que G' contém todas as árvores de ordem t e grau máximo d. Observe a condição acima é trivial quando $|W| = 0$.

Suponha, então, que a hipótese do parágrafo anterior seja falsa e que, portanto, exista $W' \in [V(G')]_1^{2t-2}$ tal que $|\Gamma_{G'}(W')| < (d+1)|W'|$. Considere $W'' = W' \cup \Gamma_{G'}(W')$ e seja $G'' = G'[W'']$. Vamos mostrar que $e(G'') \geq q|W'|/2$. De fato, observe que pela definição de W'' e G'', temos que para qualquer $v \in W'$ vale $d_{G''}(v) = d_{G'}(v) \geq q$. Portanto, temos

$$e(G'') = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G'')} d_{G''}(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in W'} d_{G''}(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in W'} q = \frac{q|W'|}{2}.$$

Como $v(G'') = |W''| \leq |W'| + |\Gamma_{G'}(W')| < |W'| + (d+1)|W'| = (d+2)|W'|$, temos

$$\frac{e(G'')}{v(G'')} > \frac{q|W'|/2}{(d+2)|W'|} = \frac{q}{2(d+2)}. \tag{24}$$

Mas observe que $G'' \subseteq G$. Lembrando a escolha de $E(G) = \mathcal{E}$, temos que $E(G'')$ forma um emparelhamento em cada linha de $\mathcal{L}$. Baseado em (15) e relembrando que $G'' \subseteq R$, temos $e(G'') \leq \rho_R(W'')$. Pela escolha de R e pelo fato de $1 \leq v(G'') = |W''| < (d+2)|W'| < 2(d+2)t$, temos

$$\frac{e(G'')}{v(G'')} = \frac{e(G'')}{|W''|} \leq \frac{\rho_R(W'')}{|W''|} \leq \frac{q}{2(d+2)},$$

contradizendo (24).

Portanto, temos que para todo $W \subseteq V(G')$ com $|W| \leq 2t - 2$ vale que $|\Gamma_{G'}(W)| \geq (d+1)|W|$. Aplicando o Teorema 34, temos que G' contém todas as árvores de ordem t e grau máximo d. Relembrando que G' é um subgrafo de R formado apenas por arestas vermelhas, o resultado segue. $\square$

CAPÍTULO 2

O Resultado para o Caso Induzido

1. Introdução

Neste capítulo nós mostramos que, para todo grafo H, o número de Ramsey induzido $r_{\text{ind}}(G,H)$ possui crescimento polinomial em $v(H)$ se $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$. Segue, abaixo, o resultado principal deste capítulo que fornece uma demonstração diferente para o resultado do Teorema 6[1].

TEOREMA 15. *Para todo grafo* $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ *existe uma constante* $f = f(G)$ *que depende apenas de* G *tal que, para todo grafo* H, *temos*

$$r_{\text{ind}}(G,H) \leq v(H)^f.$$

Assim como na demonstração Teorema 8, o grafo aleatório utilizado na demonstração do Teorema 15 é construído sobre um plano projetivo finito[2].

O restante deste capítulo traz a demonstração do Teorema 15 e está dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos a construção do grafo aleatório R. A Seção 3 enuncia a propriedade **P**, juntamente com um resultado relacionado à mesma. Na Seção 4 enunciamos a propriedade **R** e fornecemos mais alguns resultados. Finalmente, a Seção 5 traz a demonstração do Teorema 15.

É importante salientarmos que a técnica de demonstração que utilizamos para provar o Teorema 15 consiste na técnica de demonstração empregada na prova do Teorema 6 em Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**], adicionada da técnica de demonstração utilizada no Teorema 1.1 de Alon, Pach e Solymosi [**1**] em seu argumento principal.

2. A construção do grafo aleatório R

Nesta seção nós descrevemos a construção do grafo aleatório R, que servirá de base para o nosso trabalho no restante deste capítulo.

Seja H um grafo qualquer não-vazio. Suponha que seja dado um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $|\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| = n$. Vamos descrever a construção do grafo aleatório $R = R(\mathcal{P}, H)$ baseada somente em $\mathcal{P}$ e H.

Tomamos o conjunto de pontos de $\mathcal{P}$ como o conjunto de vértices de R, ou seja, temos $V(R) = \mathcal{V}$. O conjunto de arestas de R é definido da seguinte forma. Suponha que, para cada $L \in \mathcal{L}$, seja dada uma partição

[1]Veja no Apêndice D algumas relações entre as classes $\mathcal{EH}$ e $\mathcal{EH}^{\text{var}}$.

[2]Veja o Apêndice A para maiores detalhes sobre os planos projetivos finitos.

$\Pi_L = \{L_v : v \in V(H)\}$ de L indexada pelos vértices $v \in V(H)$ e considere $\Pi = \{\Pi_L : L \in \mathcal{L}\}$. Sejam a, $b \in \mathcal{V}$ quaisquer e seja $L \in \mathcal{L}$ a única linha de $\mathcal{P}$ que contém os pontos a e b. Considere a partição $\Pi_L \in \Pi$ e sejam u, $v \in V(H)$ tais que $a \in L_u$ e $b \in L_v$ com L_u, $L_u \in \Pi_L$. Então

$$\{a, b\} \in E(R) \iff \{u, v\} \in E(H).$$

Observe que, para obtermos o grafo aleatório $R = R(\mathcal{P}, H)$, basta escolhermos a família de partições $\Pi = \{\Pi_L : L \in \mathcal{L}\}$ aleatoriamente. Para isso, dada uma linha $L \in \mathcal{L}$, construímos a partição Π_L de L indexada pelos vértices do grafo H da seguinte forma. Escolhemos, independentemente para cada ponto $x \in L$, um vértice $v \in V(H)$ de maneira uniforme — i.e. com probabilidade $1/v(H)$ para todo $v \in V(H)$ — e fazemos $x \in L_v$. As escolhas de Π_L são feitas independentemente para todas as linhas $L \in \mathcal{L}$. Desta forma, definimos o grafo aleatório R como

$R(\mathcal{P}, H, \Pi)$

$$R = R(\mathcal{P}, H) = R(\mathcal{P}, H, \Pi).$$

Note que a aleatoriedade de $R = R(\mathcal{P}, H)$ decorre somente da escolha aleatória de Π. Uma vez escolhido Π, temos o grafo R determinado.

3. A Propriedade P

Nesta seção enunciamos a propriedade **P**, juntamente com um resultado relacionado à mesma.

Suponha que sejam dados um grafo H, um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $|\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| = n$, um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ e uma família $\Pi = \{\Pi_L : L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H quaisquer. Defina

$\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi) := \Big\{ L \in \mathcal{L} : \forall v \in V(H), \\ \frac{3|X|}{4v(H)\sqrt{n}} \le |X \cap L_v| \le \frac{4|X|}{3v(H)\sqrt{n}} \Big\}.$$

propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$

Dada uma constante $0 < \tilde{\varepsilon} \le 1/2$ dizemos que a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ é válida se, para todo conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \ge n^{1/2+\tilde{\varepsilon}}$, temos

$$|\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)| \ge \frac{8n}{9}.$$

$a \ll b$

O teorema que enunciamos a seguir é, em sua essência, o Corolário 11 de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] e fornece uma condição suficiente para a validade da propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ — abaixo escrevemos $a \ll b$ se $a/b \to 0$ quando $v(H) \to \infty$.

Teorema 16. *Sejam H um grafo, $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito com $|\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| = n$ e $0 < \tilde{\varepsilon} \le 1/2$ uma constante fixa. Suponha que n seja uma função de $v(H)$ satisfazendo $\ln n \ll v(H) \ll n^{\tilde{\varepsilon}/2}$. Então temos*

$$\Pr\{\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi) \text{ vale}\} \to 1$$

quando $v(H) \to \infty$. Em particular, se $v(H)^f < n < 9v(H)^f$ com $f > 2/\tilde{\varepsilon}$ constante, então existe uma constante $h_0 = h_0(f) \geq 2$ que depende apenas de f para a qual vale o que segue. Se $v(H) \geq h_0$ então existe uma família $\Pi = \{\Pi_L : L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H para a qual a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ é válida.

Antes de demonstrarmos o Teorema 16, vamos apenas enunciar um resultado que decorre do Corolário 10 de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**].

Lema 17. *Sejam H um grafo e $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito com $|\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| = n$. Suponha que n seja uma função de $v(H)$ satisfazendo $v(H) \leq n$ para $v(H)$ suficientemente grande e que α e β sejam funções de n satisfazendo $n^{-1/2} \ll \alpha\beta$. Então a probabilidade de que exista um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq \alpha n$ tal que*

$$|\mathcal{L} \backslash \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)| \geq v(H)^2 \sqrt{n} + \beta n$$

é no máximo

$$\sum_{\alpha n \leq i \leq n} \binom{n}{i} \exp\left(-cv(H)i + \frac{1}{2} v(H)^2 \sqrt{n} \ln n\right),$$

onde c é uma constante absoluta.

Apesar de o enunciado do Teorema 16 possuir algumas diferenças em relação ao enunciado do Corolário 11 de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**], temos que os passos da sua demonstração continuam exatamente os mesmos. Por isso, optamos por apenas fornecer um esboço de sua demonstração.

Esboço da demonstração do Teorema 16: Sejam H, $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$, n e $\tilde{\varepsilon}$ nas condições do enunciado. Observe que temos $v(H) < n^{\tilde{\varepsilon}/2} \leq n^{1/4} < n$ para $v(H)$ suficientemente grande.

Considere $\alpha = \alpha(n) = n^{-1/2+\tilde{\varepsilon}}$ e $\beta = \beta(n) = n^{-\tilde{\varepsilon}/2}$. Pela hipótese sobre n, $v(H)$ e $\tilde{\varepsilon}$, temos

$$v(H)^2 \sqrt{n} \ll n^{\tilde{\varepsilon}} \sqrt{n} \leq n$$

e, como $\tilde{\varepsilon} > 0$, temos

$$\beta n = n^{-\tilde{\varepsilon}/2} n \ll n$$

portanto, segue

$$v(H)^2 \sqrt{n} + \beta n \ll n. \tag{25}$$

Pelo Lema 17 temos que a probabilidade de que exista um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq \alpha n$ tal que

$$|\mathcal{L} \backslash \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)| \geq v(H)^2 \sqrt{n} + \beta n \tag{26}$$

é no máximo

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha n\le i\le n}\binom{n}{i}&\exp\left(-cv(H)i+\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\right)\\
&\le \sum_{\alpha n\le i\le n}\left(\frac{ne}{i}\right)^i\exp\left(-cv(H)i+\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\right)\\
&\le \sum_{\alpha n\le i\le n}\exp\left(i-i\ln\alpha-cv(H)i+\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\right)\\
&= \sum_{\alpha n\le i\le n}\exp\left(i+(1/2-\tilde{\varepsilon})i\ln n-cv(H)i+\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\right).
\end{aligned}$$

Mas observe que, pelo fato de termos $i\ge\alpha n=n^{1/2+\tilde{\varepsilon}}$ dentro da somatória acima e pela hipótese de $\ln n\ll v(H)\ll n^{\tilde{\varepsilon}/2}$, temos

$$\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\ll cn^{1/2+\tilde{\varepsilon}}\ln n\ll cn^{1/2+\tilde{\varepsilon}}v(H)\le cv(H)i$$

e

$$i+(1/2-\tilde{\varepsilon})i\ln n\ll cv(H)i.$$

Desta forma, se supormos $v(H)$ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
(27)\qquad \sum_{\alpha n\le i\le n}\binom{n}{i}&\exp\left(-cv(H)i+\frac{1}{2}v(H)^2\sqrt{n}\ln n\right)\\
&< \sum_{\alpha n\le i\le n}\exp\left(-cv(H)i/2\right)<\sum_{\alpha n\le i\le n}\exp\left[-(ci\ln n)/2\right]\\
&= \sum_{\alpha n\le i\le n}n^{-ci/2}<\sum_{\alpha n\le i\le n}n^{-\sqrt{n}}<n^{1-\sqrt{n}}\to 0,
\end{aligned}$$

quando $v(H)\to\infty$.

De (25), (26) e (27) segue que

$$\Pr\{\mathbf{P}(\mathcal{P},H,\tilde{\varepsilon},\Pi)\text{ vale}\}\to 1$$

quando $v(H)\to\infty$. □

4. A Propriedade R

Esta seção traz a definição da propriedade **R** e mais alguns resultados. Antes de enunciarmos a propriedade **R**, precisamos introduzir mais uma definição. Dados um número real M e três grafos Γ, G e H, escrevemos

$\Gamma\xrightarrow{M}(G,H)$

$\Gamma\xrightarrow{M}(G,H)$ se, em qualquer coloração das arestas de Γ com as cores vermelha e azul, podemos encontrar um subgrafo azul induzido de Γ isomorfo a H ou então *pelo menos* M subgrafos vermelhos induzidos de Γ isomorfos a G.

propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon,\rho,G)$

Suponha que duas constantes $0<\varepsilon\le 1/2$ e $0<\rho<1$ e um grafo G sejam dados. Dizemos que a propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon,\rho,G)$ é válida se existem duas constantes $\tilde{f} = \tilde{f}(\varepsilon, \rho, G) > 0$ e $0 < \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon, \rho, G) \leq 1/2$ para as quais vale o que segue. Para todo grafo H com $v(H) \geq 2$ e todo plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $n = |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| \geq v(H)^{\tilde{f}}$ temos que se para uma família $\Pi = \{\Pi_L \colon L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ é válida, então, para todo $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$, temos

$$R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)[X] \xrightarrow{M} (G, H), \tag{28}$$

onde $M = |X|^{(1-\rho)v(G)}$.

Dado um grafo G, diremos que G é $\mathbf{R}$-satisfatível se a propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, G)$ vale para quaisquer constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$. De forma análoga, dado um conjunto de grafos $\mathcal{G}$, diremos que $\mathcal{G}$ é $\mathbf{R}$-satisfatível se todo grafo $G \in \mathcal{G}$ é $\mathbf{R}$-satisfatível. **R**-satisfatível

O restante desta seção está dividido em duas partes. Na Subseção 4.1 estudamos duas propriedades relevantes dos grafos $\mathbf{R}$-satisfatíveis e na Subseção 4.2 demonstramos que os grafos K^1, K^2 e I^2 são $\mathbf{R}$-satisfatíveis.

4.1. Duas propriedades dos grafos R-satisfatíveis. A primeira propriedade dos grafos $\mathbf{R}$-satisfatíveis que enunciamos nesta subseção diz respeito ao crescimento assintótico do número $r_{\text{ind}}(G, H)$ para o caso em que o grafo G é $\mathbf{R}$-satisfatível. O resultado que listamos abaixo implica que se G é um grafo $\mathbf{R}$-satisfatível então, para todo grafo H, o número de Ramsey induzido $r_{\text{ind}}(G, H)$ possui crescimento polinomial em $v(H)$.

LEMA 18. *Para todo grafo $\mathbf{R}$-satisfatível G existe uma constante $f = f(G)$ que depende apenas de G tal que, para todo grafo H, temos*

$$r_{\text{ind}}(G, H) \leq v(H)^f.$$

Para demonstrarmos o Lema 18, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

LEMA 19. *Seja $k \geq 4$ um número real. Então existe um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $k < |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| < 9k$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja k nas condições do enunciado. Pelo Lema 12, cujo enunciado e demonstração encontram-se na Subseção 3.1 do capítulo anterior, temos que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\lceil \sqrt{k} \rceil \leq 2^m < 2\lceil \sqrt{k} \rceil$.

Se tomarmos $r = 2^m$ temos, pelo Lema 30 do Apêndice A, que existe um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ de ordem r. Observe que $k \leq r^2 < r^2 + r + 1 = |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| < (r+1)^2 \leq (2\lceil \sqrt{k} \rceil)^2 < 4(\sqrt{k} + 1)^2 \leq 9k$. $\square$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 18: Sejam G um grafo $\mathbf{R}$-satisfatível e H um grafo qualquer. Observe que se $v(H) = 1$, temos que a afirmação do enunciado é verdadeira para qualquer constante f. Suponha, então, $v(H) \geq 2$ e considere duas constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$ quaisquer. Seja $(\tilde{f}, \tilde{\varepsilon})$ um par de constantes associadas à validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, G)$ e faça $f' := \max\{3/\tilde{\varepsilon},\ \tilde{f}\}$.

Seja $h_0 = h_0(f')$ nas condições do Teorema 16. Se $v(H) < h_0$ então considere um grafo H' com $v(H') = h_0$ que contenha H como subgrafo *induzido*. Caso contrário, faça $H' = H$. Observe que em ambos os casos temos $v(H') \leq v(H)^{\log_2 h_0}$.

Como $v(H')^{f'} \geq v(H)^{f'} \geq v(H)^6 \geq 2^6 > 4$ temos, pelo Lema 19, que existe um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $v(H')^{f'} < n = |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| < 9v(H')^{f'}$. Observe que, pela escolha de f', h_0 e $\mathcal{P}$ temos, pelo Teorema 16, que existe uma família $\Pi = \{\Pi_L : L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ indexadas pelos vértices do grafo H' para a qual a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H', \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ é válida.

Considere o grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H', \Pi)$. Pelas escolhas de Π e $n > v(H')^{f'} \geq v(H')^{\tilde{f}}$ com $v(H') \geq 2$, temos, pela definição da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, G)$, que

$$R_n(\mathcal{P}, H', \Pi)[\mathcal{V}] \xrightarrow{M} (G, H'),$$

onde $M = n^{(1-\rho)v(G)} > 1$. Ou seja, temos

$$R_n(\mathcal{P}, H', \Pi) \xrightarrow{\text{ind}} (G, H')$$

e portanto

$$R_n(\mathcal{P}, H', \Pi) \xrightarrow{\text{ind}} (G, H),$$

pois H é subgrafo induzido de H'.

Observe que

$$v(R) = n < 9v(H')^{f'} \leq 9v(H)^{f' \log_2 h_0} < v(H)^{4 + f' \log_2 h_0}.$$

Portanto, se tormarmos $f := 4 + f' \log_2 h_0$ temos que f depende apenas de G e, para todo grafo H, vale

$$r_{\text{ind}}(G, H) \leq v(H)^f,$$

como queríamos demonstrar. □

A próxima propriedade dos grafos $\mathbf{R}$-satisfatíveis que apresentamos nesta subseção consiste no fato de que um grafo obtido pela substituição de um vértice de um grafo $\mathbf{R}$-satisfatível por outro grafo $\mathbf{R}$-satisfatível também é um grafo $\mathbf{R}$-satisfatível. Segue abaixo o Lema 20 que garante tal propriedade dos grafos $\mathbf{R}$-satisfatíveis. É importante salientar que o argumento utilizado na demonstração do Lema 20 é fortemente baseado no argumento da demonstração do Teorema 1.1 de Alon, Pach e Solymosi [**1**].

LEMA 20. *Se G_1 e G_2 são grafos $\mathbf{R}$-satisfatíveis então todo grafo $G = G_1(v \to G_2)$ com $v \in V(G_1)$ também é $\mathbf{R}$-satisfatível.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que G_1 e G_2 sejam dados nas condições do enunciado. Se $v(G_1) = 1$ temos $G = G_2$ e não há o que demonstrar.

Suponha, então, $v(G_1) \geq 2$ e seja $v \in V(G_1)$ qualquer. Tome $G = G_1(v \to G_2)$ e suponha que sejam dadas duas constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$ quaisquer. Vamos mostrar que a propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, G)$ é válida.

Defina $\varepsilon_1 := \varepsilon$, $\varepsilon_2 := \varepsilon/2$, $\rho_2 := \rho/4$ e

$$\rho_1 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{v(G_1)(3+6\varepsilon)}, \frac{\rho}{12v(G_1)}\right\}.$$

Por hipótese, as propriedades $\mathbf{R}(\varepsilon_1,\rho_1,G_1)$ e $\mathbf{R}(\varepsilon_2,\rho_2,G_2)$ são válidas. Considere, então, $(\tilde{f}_1,\tilde{\varepsilon}_1)$ e $(\tilde{f}_2,\tilde{\varepsilon}_2)$ dois pares de constantes associadas à validade das propriedades $\mathbf{R}(\varepsilon_1,\rho_1,G_1)$ e $\mathbf{R}(\varepsilon_2,\rho_2,G_2)$, respectivamente. Defina

$$\tilde{f} := \max\left\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \frac{\log_2(2e)}{\rho_1}\right\} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\varepsilon} := \min\{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2\}.$$

Vamos mostrar que $\tilde{f}$ e $\tilde{\varepsilon}$ como definidos acima demonstram a validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon,\rho,G)$. Para isso, suponha que sejam dados um grafo H com $v(H)\geq 2$, um plano projetivo finito $\mathcal{P}=(\mathcal{V},\mathcal{L})$ com $n=|\mathcal{V}|=|\mathcal{L}|\geq v(H)^{\tilde{f}}$, uma família $\Pi=\{\Pi_L\colon L\in\mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H tal que a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P},H,\tilde{\varepsilon},\Pi)$ seja válida e um conjunto $X\subseteq\mathcal{V}$ com $|X|=m\geq n^{1/2+\varepsilon}$ quaisquer. Considere $R=R_n(\mathcal{P},H,\Pi)$ e seja $R'=R[X]$. Suponha que as arestas de R' sejam coloridas com as cores vermelha e azul de forma que não haja cópia azul *induzida* de H em R'. Vamos mostrar, então, que R' deve possuir pelo menos $m^{(1-\rho)v(G)}$ cópias vermelhas *induzidas* de G.

Seja G_0 o grafo obtido de G_1 pela remoção do vértice v. Se J_0 é um subconjunto de $V(R')$ tal que $R'[J_0]$ é composto apenas por arestas vermelhas e isomorfo a G_0, denotamos por V_{J_0} o maior subconjunto de $V(R')\backslash J_0$ com a propriedade de que para todo $v'\in V_{J_0}$ vale que $R'[J_0\cup\{v'\}]$ possui apenas arestas vermelhas e existe um isomorfismo entre $R'[J_0\cup\{v'\}]$ e G_1 *que mapeia v' em v*. Sejam

$$\begin{aligned}\mathcal{J} := \big\{J\subseteq V(R')\colon\ & R'[J] \text{ é isomorfo a } G_0, \text{ composto}\\ & \text{apenas por arestas vermelhas e } |V_J|\geq m^{1-2v(G_1)\rho_1}\big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{J}} := \big\{\bar{J}\subseteq V(R')\colon\ & R'[\bar{J}] \text{ é isomorfo a } G_0, \text{ composto}\\ & \text{apenas por arestas vermelhas e } |V_{\bar{J}}|< m^{1-2v(G_1)\rho_1}\big\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{K} := \{K\subseteq V(R')\colon\ & R'[K] \text{ é isomorfo a } G_1\\ & \text{e composto apenas por arestas vermelhas}\}.\end{aligned}$$

Vamos calcular um limitante inferior para $|\mathcal{J}|$.

Primeiramente observe que

$$\begin{aligned}(29)\quad |\bar{\mathcal{J}}| &\leq \big|\big\{\bar{J}\subseteq V(R')\colon |\bar{J}|=v(G_0)\big\}\big|\\ &= \binom{v(R')}{v(G_0)} = \binom{m}{v(G_1)-1} \leq m^{v(G_1)-1}.\end{aligned}$$

Note também que, para todo $K \in \mathcal{K}$, existem $J' \in \mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}}$ e $v' \in V_{J'}$ tal que $J' \cup \{v'\} = K$. Portanto, segue

$$\mathcal{K} \subseteq \big\{J' \cup \{v'\} \colon J' \in \mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}},\ v' \in V_{J'}\big\}. \tag{30}$$

De (29) e (30), temos

$$\begin{aligned} m|\mathcal{J}| + m^{(1-2\rho_1)v(G_1)} &\geq m|\mathcal{J}| + m^{1-2v(G_1)\rho_1}|\bar{\mathcal{J}}| \\ &> \sum_{J' \in \mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}}} |V_{J'}| \geq \Big|\big\{J' \cup \{v'\} \colon J' \in \mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}},\ v' \in V_{J'}\big\}\Big| \geq |\mathcal{K}|. \end{aligned} \tag{31}$$

Observando que $|V(R')| = |X| = m \geq n^{1/2+\varepsilon} = n^{1/2+\varepsilon_1}$ temos, pela validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon_1, \rho_1, G_1)$ com as constantes $\tilde{f}$ e $\tilde{\varepsilon}$, que $|\mathcal{K}| \geq m^{(1-\rho_1)v(G_1)}$. Aplicando esta desigualdade em (31), temos

$$|\mathcal{J}| > m^{v(G_1)-1-2v(G_1)\rho_1}(m^{v(G_1)\rho_1} - 1). \tag{32}$$

Mas como $m > n^{1/2} \geq v(H)^{\tilde{f}/2}$ e $\tilde{f} \geq [\log_2(2e)]/\rho_1$, temos $m^{v(G_1)\rho_1} > v(H)^{\tilde{f}v(G_1)\rho_1/2} \geq v(H)^{\tilde{f}\rho_1} \geq v(H)^{\log_2(2e)} \geq 2e$. Aplicando esta desigualdade em (32) e observando que $\rho_1 \leq \rho/[12v(G_1)] < \{\rho[v(G_1)-1]\}/[4v(G_1)]$, temos

$$|\mathcal{J}| > m^{v(G_1)-1-2v(G_1)\rho_1} > m^{(1-\rho/2)[v(G_1)-1]}. \tag{33}$$

Agora, para todo $J \in \mathcal{J}$, defina W_J como um subconjunto de V_J de maior tamanho possível com a propriedade de que todos os seus vértices possuem a mesma vizinhança dentro J. Vamos calcular um limitante inferior para $|W_J|$, onde $J \in \mathcal{J}$.

Observe que, para todo $J \in \mathcal{J}$, os vértices de V_J podem estar ligados aos vértices de J no máximo de $\binom{v(G_1)-1}{\lceil [v(G_1)-1]/2 \rceil}$ maneiras diferentes e, pelo fato de $|V_J| \geq m^{1-2v(G_1)\rho_1}$, temos

$$\begin{aligned} |W_J| &\geq \frac{|V_J|}{\binom{v(G_1)-1}{\lceil [v(G_1)-1]/2 \rceil}} \geq \frac{m^{1-2v(G_1)\rho_1}}{\binom{v(G_1)-1}{\lceil [v(G_1)-1]/2 \rceil}} \geq \frac{m^{1-2v(G_1)\rho_1}}{\left(\frac{[v(G_1)-1]e}{\lceil [v(G_1)-1]/2 \rceil}\right)^{\lceil [v(G_1)-1]/2 \rceil}} \\ &\geq \frac{m^{1-2v(G_1)\rho_1}}{\left(\frac{2e[v(G_1)-1]}{v(G_1)-1}\right)^{v(G_1)/2}} = \frac{m^{1-2v(G_1)\rho_1}}{m^{[v(G_1)\log_m(2e)]/2}} > \frac{m^{1-2v(G_1)\rho_1}}{m^{[v(G_1)\log_{v(H)^{\tilde{f}/2}}(2e)]/2}} \\ &= m^{1-2v(G_1)\rho_1 - [v(G_1)\log_{v(H)}(2e)]/\tilde{f}} \geq m^{1-2v(G_1)\rho_1 - [v(G_1)\log_2(2e)]/\tilde{f}} \\ &\geq m^{1-3v(G_1)\rho_1}, \end{aligned} \tag{34}$$

onde a última desigualdade decorre da escolha de $\tilde{f}$. Observe também que, pelo fato de termos escolhido $\rho_1 \leq \varepsilon/[v(G_1)(3+6\varepsilon)]$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, temos

$$|W_J| \geq n^{(1/2+\varepsilon)[1-3v(G_1)\rho_1]} \geq n^{(1/2+\varepsilon)[1-\varepsilon/(1+2\varepsilon)]} = n^{1/2+\varepsilon_2}. \tag{35}$$

Agora, para todo $J \in \mathcal{J}$, defina

$$\mathcal{U}_J := \{U \subseteq V(R')\colon U \supset J,\ R'[U] \text{ é isomorfo a } G \\ \text{e composto apenas por arestas vermelhas}\}$$

e

$$\mathcal{V}_J := \{V \subseteq W_J\colon R'[V] \text{ é isomorfo a } G_2 \\ \text{e composto apenas por arestas vermelhas}\}.$$

Vamos calcular um limitante inferior para $|\mathcal{U}_J|$, onde $J \in \mathcal{J}$.

Observe que, por (35) e pela validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon_2, \rho_2, G_2)$ com as constantes $\tilde{f}$ e $\tilde{\varepsilon}$, temos $|\mathcal{V}_J| \geq |W_J|^{(1-\rho_2)v(G_2)}$. Mas observe que para todo $V' \in \mathcal{V}_J$ vale $J \cap V' = \emptyset$ e $J \cup V' \in \mathcal{U}_J$. Portanto, por (34) e pelas de escolhas de $\rho_1 \leq \rho/[12v(G_1)]$ e $\rho_2 = \rho/4$, temos

$$(36)\quad |\mathcal{U}_J| \geq |\mathcal{V}_J| \geq |W_J|^{(1-\rho_2)v(G_2)} \geq m^{[1-3v(G_1)\rho_1](1-\rho_2)v(G_2)} \\ \geq m^{(1-\rho/4)^2 v(G_2)} > m^{(1-\rho/2)v(G_2)}.$$

Agora defina

$$\mathcal{U} := \{U' \subseteq V(R')\colon R'[U'] \text{ é isomorfo a } G \\ \text{e composto apenas por arestas vermelhas}\}.$$

Observe que $|\mathcal{U}|$ nos fornece exatamente o número de cópias vermelhas *induzidas* de G em R'. Vamos mostrar que $|\mathcal{U}| > m^{(1-\rho)v(G)}$.

Observe que para todo $J \in \mathcal{J}$ temos $\mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}$. Para todo $U' \in \mathcal{U}$, defina $\mathcal{J}_{U'} := \{J \in \mathcal{J}\colon U' \in \mathcal{U}_J\} = \{J \in \mathcal{J}\colon J \subset U'\}$. Observe que, para todo $U' \in \mathcal{U}$, temos

$$(37)\quad |\mathcal{J}_{U'}| \leq \big|\{U'' \subset U'\colon |U''| = v(G_1) - 1\}\big| \\ \leq \binom{v(G)}{\left\lceil \frac{v(G)}{2} \right\rceil} < 2^{v(G)} < (2e)^{v(G)} = m^{v(G)\log_m(2e)} \\ < m^{2v(G)[\log_{v(H)}(2e)]/\tilde{f}} < m^{\rho v(G)/2},$$

onde as duas últimas desigualdades decorrem do fato de termos escolhido $m > n^{1/2} \geq v(H)^{\tilde{f}/2}$ e $\tilde{f} \geq \log_2(2e)/\rho_1 \geq \log_{v(H)}(2e)/\rho_1 > 4\log_{v(H)}(2e)/\rho$.

Portanto, por (33), (36) e (37), temos

$$|\mathcal{U}| \geq \left|\bigcup_{J\in\mathcal{J}} \mathcal{U}_J\right| \geq \frac{\sum_{J\in\mathcal{J}} |\mathcal{U}_J|}{\max\{|\mathcal{J}_{U'}|\colon U' \in \mathcal{U}\}} \geq \frac{|\mathcal{J}| \min\{|\mathcal{U}_J|\colon J \in \mathcal{J}\}}{\max\{|\mathcal{J}_{U'}|\colon U' \in \mathcal{U}\}} \\ > m^{(1-\rho/2)[v(G_1)+v(G_2)-1]-\rho v(G)/2} = m^{(1-\rho)v(G)}.$$

$\square$

4.2. Alguns grafos R-satisfatíveis. Nesta subseção nós provamos que os grafos K^1, K^2 e I^2 são $\mathbf{R}$-satisfatíveis.

LEMA 21. *O grafo K^1 é $\mathbf{R}$-satisfatível.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que as constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$ sejam dadas. Vamos mostrar que a propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, K^1)$ é válida.

Suponha que sejam dados um grafo H com $v(H) \geq 2$, um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$, uma família $\Pi = \{\Pi_L \colon L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H e um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$ quaisquer. Considere o grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$.

Note que $R[X]$ possui exatamente

$$|X| > |X|^{1-\rho}$$

cópias induzidas de K^1. Como K^1 não possui arestas, temos que em qualquer coloração das arestas de $R[X]$ nas cores vermelha e azul vale que $R[X]$ possui pelo menos $|X|^{1-\rho}$ cópias vermelhas induzidas de K^1. Portanto, segue que $R[X] \xrightarrow{M} (K^1, H)$, onde $M = |X|^{1-\rho}$. $\square$

LEMA 22. *O grafo K^2 é $\mathbf{R}$-satisfatível.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que as constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$ sejam dadas e defina

$$\tilde{f} := \frac{3}{\rho(1 + 2\varepsilon)} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\varepsilon} := \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $\tilde{f}$ e $\tilde{\varepsilon}$ como definidos acima demonstram a validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, K^2)$. Para isso, suponha que sejam dados um grafo H com $v(H) \geq 2$, um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $n = |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| \geq v(H)^{\tilde{f}}$, uma família $\Pi = \{\Pi_L \colon L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H tal que a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ seja válida e um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$ quaisquer. Considere $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$ e suponha que as arestas de $R[X]$ sejam coloridas com as cores vermelha e azul de forma que não haja cópia azul *induzida* de H em $R[X]$. Vamos mostrar, então, que $R[X]$ deve possuir pelo menos $|X|^{(1-\rho)2}$ arestas vermelhas.

Primeiramente observe que, pela hipótese da validade da propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ e pelo fato de termos $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon} = n^{1/2+\tilde{\varepsilon}}$, temos

$$|\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)| \geq \frac{8n}{9}. \tag{38}$$

Agora considere $L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$ qualquer e seja $\Pi_L = \{L_v \colon v \in V(H)\}$ a partição dos vértices de L indexada pelos vértices do grafo H em Π. Observe que, pela definição de $\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$, temos

$$|X \cap L_v| \geq \frac{3|X|}{4v(H)\sqrt{n}}$$

para todo $v \in V(H)$. Desta forma, se tomarmos $s = \lceil 3|X|/[4v(H)\sqrt{n}]\rceil$ então a construção do grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$ implica que $R[X \cap L]$ contém um subgrafo *induzido* S_L isomorfo a $H(V(H) \to I^s)$. Mas como S_L é também um subgrafo induzido de $R[X]$ e, por hipótese, $R[X]$ não possui cópia azul induzida de H, temos então que S_L também não possui cópia azul induzida de H. Aplicando o Lema 11 do Capítulo 1 em S_L, temos o número de arestas vermelhas em S_L é pelo menos

$$s^2 \geq \left(\frac{3|X|}{4v(H)\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{9|X|^2}{16v(H)^2 n}. \tag{39}$$

Note que, pelo fato de construirmos o grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$ sobre o plano projetivo finito $\mathcal{P}$, temos que para quaisquer L, $L' \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$ distintos vale que $E(S_L) \cap E(S_{L'}) = \emptyset$. Pela consideração acima e por (38) e (39) temos que o número de arestas vermelhas em $R[X]$ é pelo menos

$$\sum_{L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)} s^2 \geq \frac{8n}{9} \times \frac{9|X|^2}{16v(H)^2 n} = \frac{|X|^2}{2v(H)^2}.$$

Pela escolha de $\tilde{f} = 3/[\rho(1+2\varepsilon)]$ e pelas hipóteses de $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$, $n \geq v(H)^{\tilde{f}}$ e $v(H) \geq 2$ temos então que $R[X]$ possui pelo menos

$$\begin{aligned} \frac{|X|^2}{2v(H)^2} &= \frac{|X|^{(1-\rho)2}|X|^{2\rho}}{2v(H)^2} \geq \frac{|X|^{(1-\rho)2} n^{(1+2\varepsilon)\rho}}{2v(H)^2} \\ &\geq \frac{|X|^{(1-\rho)2} v(H)^{\tilde{f}(1+2\varepsilon)\rho}}{2v(H)^2} = \frac{|X|^{(1-\rho)2} v(H)}{2} \geq |X|^{(1-\rho)2} \end{aligned} \tag{40}$$

arestas vermelhas.

De (40) segue que $R[X] \xrightarrow{M} (K^2, H)$, onde $M = |X|^{(1-\rho)2}$. □

LEMA 23. *O grafo I^2 é **R**-satisfatível.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que as constantes $0 < \varepsilon \leq 1/2$ e $0 < \rho < 1$ sejam dadas e defina

$$\tilde{f} := \max\left\{\frac{71}{50\varepsilon}, \frac{4}{\rho(1+2\varepsilon)}\right\} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\varepsilon} := \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $\tilde{f}$ e $\tilde{\varepsilon}$ como definidos acima demonstram a validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, I^2)$. Para isso, suponha que sejam dados um grafo H com $v(H) \geq 2$, um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ com $n = |\mathcal{V}| = |\mathcal{L}| \geq v(H)^{\tilde{f}}$, uma família $\Pi = \{\Pi_L \colon L \in \mathcal{L}\}$ de partições das linhas de $\mathcal{P}$ indexadas pelos vértices do grafo H tal que a propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ seja válida e um conjunto $X \subseteq \mathcal{V}$ com $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$ quaisquer. Considere o grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$. Vamos mostrar que $R[X]$ possui pelo menos $|X|^{(1-\rho)2}$ cópias *induzidas* de I^2. Observe que isto é suficiente para provarmos a validade da propriedade $\mathbf{R}(\varepsilon, \rho, I^2)$ pois, como I^2 não possui arestas, temos que em qualquer coloração das arestas de $R[X]$ nas cores vermelha e azul vale que $R[X]$ possui pelo menos $|X|^{(1-\rho)2}$ cópias vermelhas induzidas de I^2.

Assim como na demonstração do Lema 22, a hipótese da validade da propriedade $\mathbf{P}(\mathcal{P}, H, \tilde{\varepsilon}, \Pi)$ e o fato de termos $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon} = n^{1/2+\tilde{\varepsilon}}$ implicam

$$|\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)| \geq \frac{8n}{9}. \tag{41}$$

Agora considere $L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$ qualquer e seja $\Pi_L = \{L_v \colon v \in V(H)\}$ a partição dos vértices de L indexada pelos vértices do grafo H em Π. Pela definição de $\mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$ temos

$$|X \cap L_v| \geq \frac{3|X|}{4v(H)\sqrt{n}}$$

para todo $v \in V(H)$. Desta forma, se tomarmos $s = \lceil 3|X|/[4v(H)\sqrt{n}]\rceil$ então a construção do grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$ implica que $R[X \cap L]$ contém uma coleção $I_{L,1}, \ldots, I_{L,v(H)}$ de subgrafos *induzidos* dijuntos nos vértices e isomorfos a I^s. Observe que pelas hipóteses de $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon} \geq v(H)^{\varepsilon\tilde{f}}\sqrt{n}$ e $v(H) \geq 2$ e pela escolha de $\tilde{f} \geq 71/(50\varepsilon)$ temos que

$$s \geq \frac{3|X|}{4v(H)\sqrt{n}} \geq \frac{3v(H)^{\varepsilon\tilde{f}-1}}{4} \geq \frac{3v(H)^{21/50}}{4} \geq \frac{3 \times 2^{21/50}}{4} > 1.$$

Desta forma, se definirmos $\mathcal{I}_L$ como o conjunto de todas as cópias induzidas de I^2 em $R[X \cap L]$ temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_L| &\geq \sum_{1 \leq i \leq v(H)} \binom{v(I_{L,i})}{2} = v(H)\binom{s}{2} \\ &\geq v(H)\left(\frac{3|X|}{8v(H)\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{9|X|^2}{64v(H)n}. \end{aligned} \tag{42}$$

Note que pelo fato de termos construído o grafo $R = R_n(\mathcal{P}, H, \Pi)$ sobre o plano projetivo finito $\mathcal{P}$, temos que para quaisquer L, $L' \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)$ distintos vale que $\mathcal{I}_L \cap \mathcal{I}_{L'} = \emptyset$. Pela consideração acima e por (41) e (42) temos que o número de cópias induzidas de I^2 em $R[X]$ é pelo menos

$$\sum_{L \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, H, X, \Pi)} |\mathcal{I}_L| \geq \frac{8n}{9} \times \frac{9|X|^2}{64v(H)n} = \frac{|X|^2}{8v(H)}.$$

Pela escolha de $\tilde{f} \geq 4/[\rho(1+2\varepsilon)]$ e pelas hipóteses de $|X| \geq n^{1/2+\varepsilon}$, $n \geq v(H)^{\tilde{f}}$ e $v(H) \geq 2$ temos então que $R[X]$ possui pelo menos

$$\begin{aligned} \frac{|X|^2}{8v(H)} &= \frac{|X|^{(1-\rho)2}|X|^{2\rho}}{8v(H)} \geq \frac{|X|^{(1-\rho)2}n^{(1+2\varepsilon)\rho}}{8v(H)} \\ &\geq \frac{|X|^{(1-\rho)2}v(H)^{\tilde{f}(1+2\varepsilon)\rho}}{8v(H)} \geq \frac{|X|^{(1-\rho)2}v(H)^3}{8} \geq |X|^{(1-\rho)2} \end{aligned} \tag{43}$$

cópias induzidas de I^2.

De (43) segue que $R[X] \xrightarrow{M} (I^2, H)$, onde $M = |X|^{(1-\rho)2}$. $\square$

5. A prova do Teorema 15

Considere o seguinte lema auxiliar.

LEMA 24. *Seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos* **R**-*satisfatível qualquer. Então $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ também é* **R**-*satisfatível.*

Observe que o Teorema 15 decorre da aplicação do Lema 18 no lema listado acima com $\mathcal{G} = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 24: Seja $\mathcal{G}$ nas condições do enunciado. Primeiramente vamos mostrar, por indução em i, que $\mathcal{EH}_i^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ é **R**-satisfatível para todo $i \in \mathbb{N}$.

- Caso 1 ($i = 0$):
  Observe que os Lemas 21, 22 e 23 implicam que o conjunto $\{K^1$, K^2, $I^2\}$ é **R**-satisfatível. Pela hipótese sobre $\mathcal{G}$ temos que $\mathcal{EH}_0^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\}) = \mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\}$ é **R**-satisfatível.

- Caso 2 ($i > 0$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que i e seja $G \in \mathcal{EH}_i^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ qualquer. Vamos mostrar que G é **R**-satisfatível.

  De fato, pela definição de $\mathcal{EH}_i^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ com $i > 0$ temos que existem $G_1, G_2 \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{\{K^1, K^2, I^2\})$ e $v \in V(G_1)$ tais que $G = G_1(v \to G_2)$. Pela hipótese de indução temos que G_1 e G_2 são **R**-satisfatíveis e, pelo Lema 20, segue que G também é **R**-satisfatível.

Como $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ é a *menor* classe de grafos que contém $\mathcal{EH}_i^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^1, K^2, I^2\})$ é **R**-satisfatível. $\square$

Como já foi discutido na introdução deste texto, temos que os resultados dos Teoremas 6 e 15 são equivalentes. Mas é válido fazermos algumas considerações sobre o resultado obtido neste capítulo.

Um resultado que pode ser facilmente demonstrado a partir do Lema 17 de Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] é dado a seguir.

LEMA 25. *Seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos* **R**-*satisfatível qualquer. Então $\mathcal{EH}(\mathcal{G} \cup \{K^1\})$ também é* **R**-*satisfatível.*

Assim como acontece com o Teorema 15, a única forma de se fortalecer o Teorema 6 mantendo a demonstração encontrada em Kohayakawa, Prömel e Rödl [**11**] seria através do Lema 25, ou seja, através da descoberta de novos grafos **R**-satisfatíveis. Desta forma, o Teorema 38 do Apêndice D garante que a classe de grafos obtida pelo Lema 25 está sempre contida na classe obtida pelo Lema 24, quando consideramos o mesmo conjunto de grafos $\mathcal{G}$ **R**-satisfatível. Mas segundo o Teorema 40 do Apêndice D, bastaria descobrirmos um único grafo **R**-satisfatível não pertencente a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ para que melhorássemos o resultado fornecido pelo técnica empregada em [**11**], mesmo considerando o Lema 25.

Tendo este objetivo em mente, um fato que pode ser facilmente verificado é que um subgrafo induzido de um grafo **R**-satisfatível também é um grafo **R**-satisfatível. Desta forma, pelo Teorema 41 do Apêndice D temos que a tarefa de descobrir um grafo **R**-satisfatível não pertencente a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ seria pelo menos tão difícil quanto mostrar que o grafo P^4, o caminho com 4 vértices, é **R**-satisfatível. Apesar dos nossos esforços neste sentido, não encontramos indícios de que o grafo P^4 seja **R**-satisfatível.

APÊNDICE A

Planos Projetivos Finitos

O nosso objetivo neste apêndice é fornecer ao leitor uma breve introdução aos planos projetivos finitos. Os resultados aqui apresentados são apenas os necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho. Todo o conteúdo deste apêndice é baseado no Capítulo 8 de Matoušek e Nešetřil [**13**].

DEFINIÇÃO 26 (Plano projetivo finito). *Sejam X um conjunto finito e $\mathcal{L}$ uma família de subconjuntos de X. O par $(X, \mathcal{L})$ é chamado de plano projetivo finito se satisfaz os seguintes axiomas:*

- **A0:** *Existe um conjunto com quatro elementos $F \subseteq X$ tal que $|L \cap F| \leq 2$ para todo conjunto $L \in \mathcal{L}$.*
- **A1:** *Quaisquer dois conjuntos distintos $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ intersectam em exatamente um elemento, ou seja, temos $|L_1 \cap L_2| = 1$.*
- **A2:** *Para quaisquer dois elementos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe exatamente um conjunto $L \in \mathcal{L}$ tal que $x_1, x_2 \in L$.*

Se $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ é um plano projetivo finito, chamamos os elementos em X de *pontos* de $\mathcal{P}$ e os conjuntos em $\mathcal{L}$ de *linhas* de $\mathcal{P}$. Se x é um ponto de $\mathcal{P}$ e L é uma linha de $\mathcal{P}$ com $x \in L$, dizemos que "o ponto x está na linha L" e que "a linha L passa pelo ponto x". Dados dois pontos distintos a e b de $\mathcal{P}$, denotamos por $\overline{ab}$ a única linha L de $\mathcal{P}$ que contém ambos os pontos a e b. Analogamente, dadas duas linhas distintas L e L' de $\mathcal{P}$, denotamos por $L \cap L'$ o único ponto[1] x de $\mathcal{P}$ que pertence às linhas L e L'.

pontos e *linhas* de $\mathcal{P}$

$\overline{ab}$

$L \cap L'$

Listamos abaixo as principais propriedades dos planos projetivos finitos.

PROPOSIÇÃO 27. *Seja $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito. Então todas as suas linhas possuem o mesmo número de pontos, ou seja, $|L| = |L'|$ para quaisquer $L, L' \in \mathcal{L}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $L, L' \in \mathcal{L}$ duas linhas quaisquer de $\mathcal{P}$. Primeiramente vamos mostrar que existe $x \in X$ tal que $x \notin L \cup L'$.

Considere $F \subseteq X$ nas condições do axioma A0 da Definição 26. Se $F \nsubseteq L \cup L'$ temos claramente que existe $x \in F$ tal que $x \notin L \cup L'$ e não há o que demonstrar. Suponha, então, $F \subseteq L \cup L'$. Observe que, pela escolha de F, temos $|F \cap L|, |F \cap L'| \leq 2$. Desta forma, a única possibilidade que podemos ter é dada, sem perda de generalidade, por $F \cap L = \{a, c\}$ e $F \cap L' = \{b, d\}$ com $F = \{a, b, c, d\}$. Vamos mostrar que $x = \overline{ab} \cap \overline{cd}$ não

[1] Note o pequeno abuso de notação que cometemos aqui, pois, a rigor, $L \cap L'$ nos fornece um *conjunto* com um único ponto.

pertence nem a L e nem a L'. De fato, suponha $x \in L$. Se $x \neq a$ temos $\overline{ab} = \overline{xa} = L$ e se $x \neq c$ temos $\overline{cd} = \overline{xc} = L$. Note que sempre algum dos dois casos ocorre, o que é absurdo, pois $b, d \notin L$. Portanto, temos $x \notin L$ — o raciocínio para mostrar que $x \notin L'$ é análogo.

Agora, para mostrar que $|L| = |L'|$, vamos construir uma bijeção entre os pontos de $|L|$ e $|L'|$. Considere a função $\varphi\colon L \to L'$ definida por $\varphi(y) = \overline{xy} \cap L'$ para todo ponto y de L. Note que, para todo $z \in L'$, temos $\varphi(\overline{xz} \cap L) = \overline{x(\overline{xz} \cap L)} \cap L' = \overline{xz} \cap L' = z$, ou seja, temos que φ é uma função sobrejetora. Por outro lado, suponha que existam $y, y' \in L$ distintos tais que $\varphi(y) = \varphi(y') = z$. Neste caso, temos $y \in \overline{xy} = \overline{xz}$ e $y' \in \overline{xy'} = \overline{xz}$, ou seja, temos $\overline{yy'} = \overline{xz}$. Mas $L = \overline{yy'}$ e, portanto, temos $x \in L$, o que contraria a escolha de x. Temos, desta forma, que φ é também uma função injetora. $\square$

Provada a Proposição 27, podemos definir o conceito de ordem de um plano projetivo finito.

DEFINIÇÃO 28 (Ordem de um plano projetivo finito). *A ordem de um plano projetivo finito $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ é o número $|L| - 1$, onde L é uma linha qualquer de $\mathcal{P}$.*

Enunciamos abaixo mais algumas propriedades dos planos projetivos finitos.

PROPOSIÇÃO 29. *Seja $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$ um plano projetivo finito de ordem n. Então temos*

1. *Exatamente $n + 1$ linhas passam por cada ponto de $\mathcal{P}$.*
2. $|X| = n^2 + n + 1$.
3. $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$.

DEMONSTRAÇÃO DE 1: Seja x um ponto qualquer de $\mathcal{P}$. Vamos mostrar, primeiramente, que existe uma linha L de $\mathcal{P}$ que não contém o ponto x. Considere $F \subseteq X$ nas condições do axioma A0 da Definição 26 e sejam a, b e c três pontos de F distintos de x. Observe que x não pode pertencer a $\overline{ab}$ e a $\overline{ac}$ ao mesmo tempo. De fato, se tivermos $x \in \overline{ab}$ e $x \in \overline{ac}$, então vale que $\overline{ab} = \overline{ax} = \overline{ac}$, o que significa que existe uma linha em $\mathcal{P}$ que contém os pontos a, b e c, contrariando a escolha de F. Desta forma, temos que existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $x \notin L$, como queríamos mostrar.

Agora considere uma linha L' de $\mathcal{P}$ tal que $x \in L'$ e tome $x' = L \cap L'$. Como $x' \in L$, temos $x \neq x'$. Observando que $x, x' \in L'$, temos que $L' = \overline{xx'}$. Desta forma, temos que o número de linhas distintas que passam por x é igual ao número de linhas distintas da forma $\overline{xy}$, onde $y \in L$.

Sejam, então, y e z dois pontos de L. Observe que não podemos ter $\overline{xy} = \overline{xz}$, pois neste caso teríamos $x \in \overline{yz} = L$, contrariando a escolha de L. Portanto, temos que o número de linhas que passam por x é dado por $|L| = n + 1$. $\square$

DEMONSTRAÇÃO DE 2: Sejam x e L como na demonstração do item anterior. Relembre que exatamente $|L| = n+1$ linhas distintas passam por x, todas da forma $\overline{xy}$, onde $y \in L$.

Seja x' um ponto qualquer de $\mathcal{P}$ distinto de x. Observe que $x, x' \in \overline{xx'}$, ou seja, existe uma linha que passa por x e que contém x'. Desta forma, temos $X = \bigcup_{y \in L} \overline{xy}$.

Agora tome y e y' dois pontos distintos quaisquer de L. Já sabemos, pela demonstração do item anterior, que $\overline{xy} \neq \overline{xy'}$. Assim, temos $\overline{xy} \cap \overline{xy'} = x$ e, portanto, vale $|X| = |\bigcup_{y \in L} \overline{xy}| = 1 + \sum_{y \in L}(|\overline{xy}| - 1) = 1 + (n+1)n = n^2 + n + 1$. □

DEMONSTRAÇÃO DE 3: Seja L uma linha qualquer de $\mathcal{P}$. Para todo $x \in L$, considere $\mathcal{L}_x = \{L \in \mathcal{L} \colon x \in L\}$ — observe que, pelo item 1, temos $|\mathcal{L}_x| = n+1$.

Seja L' uma linha qualquer de $\mathcal{P}$ distinta de L. Observe que $L' \in \mathcal{L}_{L \cap L'}$, ou seja, existe um ponto x de L tal que $L' \in \mathcal{L}_x$. Desta forma, temos $\mathcal{L} = \bigcup_{x \in L} \mathcal{L}_x$.

Agora tome x e x' dois pontos distintos quaisquer de L. Observe que $\mathcal{L}_x \cap \mathcal{L}_{x'} = \overline{xx'} = L$. Temos, portanto, $|\mathcal{L}| = |\bigcup_{x \in L} \mathcal{L}_x| = 1 + \sum_{x \in L}(|\mathcal{L}_x| - 1) = 1 + (n+1)n = n^2 + n + 1$. □

Enunciamos e provamos abaixo o resultado que fornece uma condição suficiente para a existência de um plano projetivo finito.

LEMA 30. *Seja n um inteiro positivo. Se n é uma potência de um número primo então existe um plano projetivo finito de ordem n.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que n seja dado nas condições do enunciado. Como é bastante conhecido no estudo da Álgebra, temos que o fato de n ser uma potência de um número primo implica a existência de um corpo K com n elementos. Utilizaremos este corpo K como base para a construção de um plano projetivo finito de ordem n.

Suponha, sem perda de generalidade, que os elementos neutros da adição e da multiplicação de K são, respectivamente, 0 e 1. Considere $T = \{(1, x, y) \colon x, y \in K\} \cup \{(0, 1, x) \colon x \in K\} \cup \{(0, 0, 1)\}$ — observe que T é composto por todas as triplas de $K^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ cujo primeiro componente não-nulo é igual a 1. Para todo $(x, y, z) \in T$, defina $P_{(x,y,z)} := \{(x', y', z') \in T \colon xx' + yy' + zz' = 0\}$ — note que não é difícil verificar que $|P_{(x,y,z)}| \geq 2$. Considere $\mathcal{P} = (X, \mathcal{L})$, onde $X = T$ e $\mathcal{L} = \{P_{(x,y,z)} \colon (x, y, z) \in T\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{P}$ satisfaz os axiomas A0, A1 e A2 da Definição 26.

Para demonstrarmos que $\mathcal{P}$ satisfaz o axioma A0, tome $F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \subseteq X$ e seja $L = P_{(x,y,z)} \in \mathcal{L}$, com $(x,y,z) \in X$, qualquer. Se (x, y, z) possui no máximo uma componente nula, é fácil verificar que existem pelo menos dois elementos de $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset F$ que não pertencem a $P_{(x,y,z)} = L$, ou seja, temos $|L \cap F| \leq 2$. Se (x, y, x) possui duas componentes nulas, então temos que (x, y, z) só pode ser igual a $(1,0,0)$ ou $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$. Nos três casos é fácil verificar que somente

(x, y, z) e $(1, 1, 1)$ não pertencem a $P_{(x,y,z)} = L$, ou seja, vale $|L \cap F| = 2$. Desta forma, temos que para todo $L \in \mathcal{L}$ vale $|L \cap F| \leq 2$, o que implica que $\mathcal{P}$ satisfaz o axioma A0.

Para mostrarmos que $\mathcal{P}$ satisfaz os axiomas A1 e A2, basta verificarmos que, para quaisquer (x, y, z), $(x', y', z') \in T = X$ distintos, temos

$$|\{(x'', y'', z'') \in T \colon xx'' + yy'' + zz'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0\}| = 1. \tag{44}$$

De fato, se L e L' são duas linhas distintas de $\mathcal{P}$, temos, pela definição de $\mathcal{L}$, que existem (x, y, z), $(x', y', z') \in T$ distintos tais que $T = P_{(x,y,z)}$ e $T' = P_{(x',y',z')}$. Portanto, temos que (44) implica

$$|L \cap L'| = |P_{(x,y,z)} \cap P_{(x',y',z')}| =$$

$$|\{(x'', y'', z'') \in T \colon xx'' + yy'' + zz'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0\}| = 1,$$

o que prova que $\mathcal{P}$ satisfaz axioma A1 da Definição 26. Observe também que (44) implica $L \neq L'$ — pois temos $|L \cap L'| = 1 < |L|, |L'|$. Desta forma, não é difícil verificar que se (44) vale, então

$$\begin{array}{c} (x, y, z), (x', y', z') \in T \\ \text{e} \\ (x, y, z) \neq (x', y', z') \end{array} \iff \begin{array}{c} P_{(x,y,z)}, P_{(x',y',z')} \in \mathcal{L} \\ \text{e} \\ P_{(x,y,z)} \neq P_{(x',y',z')} \end{array} \tag{45}$$

também vale.

Por outro lado, observe que, para qualquer ponto (x, y, z) de $\mathcal{P}$, temos que o conjunto formado pelas linhas que passam por (x, y, z) é dado por $\{L \in \mathcal{L} \colon (x, y, z) \in L\} = \{P_{(x',y',z')} \colon (x', y', z') \in T \text{ e } xx' + yy' + zz' = 0\}$. Desta forma, se (x, y, z) e (x', y', z') são dois pontos dintintos de $\mathcal{P}$, temos que (44) implica

$$|\{L'' \in \mathcal{L} \colon (x, y, z) \in L''\} \cap \{L'' \in \mathcal{L} \colon (x', y', z') \in L''\}| =$$

$$|\{P_{(x'',y'',z'')} \in \mathcal{L} \colon xx'' + yy'' + zz'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0\}| =$$

$$|\{(x'', y'', z'') \in T \colon xx'' + yy'' + zz'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0\}| = 1,$$

onde a última igualdade decorre de (45). Portanto, temos que (44) também implica que $\mathcal{P}$ satisfaz o axioma A2 da Definição 26.

Para provarmos (44), considere (x, y, z), $(x', y', z') \in T$, com $(x, y, z) \neq (x', y', z')$, quaisquer. Não é difícil verificar que, para qualquer escolha de (x, y, z) e (x', y', z'), temos que não existe $\lambda \in K$ $(\lambda \neq 0)$ tal que $(x, y, z) = \lambda(x', y', z')$. Ou seja, se olharmos para as triplas (x, y, z) e (x', y', z') como vetores de dimensão 3 sobre o corpo K, temos que eles são linearmente independentes. Desta forma, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} \tag{46}$$

possui posto[2] 2.

[2] Estamos considerando independência linear e posto sobre o corpo K.

Vamos, agora, olhar para as colunas da matriz em (46) como vetores de dimensão 2. Como três vetores em um espaço de dimensão 2 são obrigatoriamente linearmente dependentes, temos que existem x'', y'', $z'' \in K$, não todos iguais a 0, tais que

$$x''(x,x') + y''(y,y') + z''(z,z') = (0,0). \tag{47}$$

Observe que se escrevermos as coordenadas separadamente, temos $xx'' + yy'' + zz'' = x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$.

Por outro lado, como o posto da matriz em (46) é 2, temos que existem duas colunas linearmente independentes. Suponha, por exemplo, que estas colunas sejam (x,x') e (y,y'). Isto significa que, para qualquer vetor $(u,v) \in K^2$, a equação $x''(x,x') + y''(x,x') = (u,v)$ possui uma única solução. Em outras palvras, dado o valor de z'', temos que os valores de x'' e y'' são determinados de forma única. Assim, temos que todas as soluções de (47) são da forma $\lambda(x'',y'',z'')$ com $\lambda \in K\backslash\{0\}$. Não é difícil verificar que *exatamente* uma destas possíveis soluções pertence a T, o que prova (44).

Temos, portanto, que $\mathcal{P}$ é um plano projetivo finito. Como é fácil verificar que

$$|X| = |T| = |\{(1,x,y)\colon x,y \in K\}| + |\{(0,1,x)\colon x \in K\}| + |\{(0,0,1)\}| = n^2 + n + 1$$

temos, pelo item 2 da Proposição 29, que a única ordem possível para $\mathcal{P}$ é dada por n. $\square$

APÊNDICE B

Um Limitante para Grandes Desvios

Neste apêndice enunciamos e provamos parte do Teorema 2.5 de McDiarmid [**14**]. Este resultado, cujo enunciado segue abaixo, nos fornece uma desigualdade exponencial para a probabilidade de grandes desvios de uma somatória de variáveis aleatórias independentes.

TEOREMA 31. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e suponha que, para todo $1 \leq k \leq n$, existam constantes a_k e b_k tais que $a_k \leq X_k \leq b_k$. Considere $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ e $\mu = E(S_n)$. Então, para todo $t \geq 0$, temos*

$$\Pr\{S_n \geq \mu + t\} \leq e^{-2t^2/\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}.$$

Para demonstrarmos o Teorema 31, precisaremos de dois lemas auxiliares. Este primeiro lema é extraído de Hoeffding [**9**].

LEMA 32. *Seja X uma variável aleatória satisfazendo $E(X) = 0$ e $a \leq X \leq b$ para duas constantes a e b. Então, para todo $h > 0$, temos*

$$E(e^{hX}) \leq e^{\frac{1}{8}h^2(b-a)^2}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como e^{hx} é uma função convexa de x, temos que, para todo $a \leq x \leq b$, vale

$$e^{hx} \leq \frac{x-a}{b-a}e^{hb} + \frac{b-x}{b-a}e^{ha}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} E(e^{hX}) \leq \frac{b}{b-a}e^{ha} - \frac{a}{b-a}e^{hb} &= (1-p)e^{-py} + pe^{(1-p)y} \\ &= e^{-py}(1-p+pe^{y}) = e^{f(y)}, \end{aligned}$$

onde $p = -a/(b-a)$, $y = (b-a)h$ e $f(x) = -px + \ln(1-p+pe^x)$. Mas observe que

$$f'(x) = -p + \frac{pe^x}{(1-p)+pe^x} = -p + \frac{p}{p+(1-p)e^{-x}}$$

e

$$f''(x) = \frac{p(1-p)e^{-x}}{[p+(1-p)e^{-x}]^2} \leq \frac{1}{4}$$

— pois a média geométrica é limitada superiormente pela média aritmética.

Como $f(0) = f'(0) = 0$, temos, pelo teorema de Taylor, que vale

$$f(y) \leq \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{8}(b-a)^2h^2,$$

o que fornece a desigualdade desejada. $\square$

O próximo lema enuncia a conhecida desigualdade de Markov.

LEMA 33. *Seja X uma variável aleatória não-negativa. Então* $\Pr\{X \geq t\} \leq E(X)/t$ *para todo $t > 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que X esteja definida sobre o espaço de probabilidade Ω e defina $\Omega_t := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \geq t\}$. Observando que

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\Pr(\omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega_t} t\ \Pr(\omega) = t\sum_{\omega\in\Omega_t}\Pr(\omega) = t\ \Pr\{X \geq t\},$$

o resultado segue. $\square$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 31: Temos, pelo Lema 32, que para todo $h > 0$ vale

$$\begin{aligned} E(e^{h(S_n-\mu)}) = E\big(\prod_{k=1}^{n} e^{h[X_k-E(X_k)]}\big) &= \prod_{k=1}^{n} E\big(e^{h[X_k-E(X_k)]}\big) \\ &\leq e^{\frac{1}{8}h^2\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 33, temos

$$\begin{aligned} \Pr\{S_n-\mu \geq t\} = \Pr\{e^{h(S_n-\mu)} \geq e^{ht}\} &\leq e^{-ht}E(e^{h(S_n-\mu)}) \\ &\leq e^{-ht+\frac{1}{8}h^2\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}. \end{aligned}$$

Tomando $h = 4t/\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2$, o resultado segue. $\square$

APÊNDICE C

Grafos Expansores e Árvores Pequenas

Neste apêndice enunciamos e demonstramos um resultado que estabelece uma condição suficiente para que um grafo contenha cópias de árvores de grau máximo limitado. O teorema que segue abaixo, bem como a sua demonstração, são retirados de Friedman e Pippenger [**7**].

TEOREMA 34. *Sejam d e n inteiros dados. Se H é um grafo não-vazio tal que, para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$, vale*

$$|\Gamma_H(X)| \geq (d+1)|X|,$$

então H contém uma cópia de toda árvore T com $v(T) \leq n$ e $\Delta(T) \leq d$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 34, vamos introduzir algumas definições. Se T é uma árvore e H é uma grafo, chamaremos a função $f\colon V(T) \mapsto V(H)$ de *imersão* de T em H se f é injetora e $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H sempre que v e w são adjacentes em T. Chamaremos uma árvore T de *pequena* se $v(T) \leq n$ e $\Delta(T) \leq d$, onde n e d são constantes fixadas nas condições do enunciado do Teorema 34. Chamaremos um grafo H de *expansor* se, para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$, vale

imersão

árvore pequena

grafo expansor

$$|\Gamma_H(X)| \geq (d+1)|X|.$$

Seja f uma imersão de uma árvore T em um grafo H. Se $x \in V(H)$, definimos

$J_f(x)$, $B_f(x)$

$$J_f(x) := \begin{cases} d_T(f^{-1}(x)), & \text{se } x \in f(V(T)) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad B_f(x) := d - J_f(x).$$

Se $X \subseteq V(H)$, definimos

$A_f(X)$, $B_f(X)$, $C_f(X)$

$$A_f(X) := |\Gamma_H(X) \backslash f(V(T))|, \quad B_f(X) := \sum_{x \in X} B_f(x) \quad \text{e}$$

$$C_f(X) := A_f(X) - B_f(X).$$

Os seguintes lemas também serão necessários para a demonstração do Teorema 34.

LEMA 35. *Suponha que sejam dados um grafo expansor H, uma árvore pequena T, uma árvore $S \subset T$ obtida de T pela remoção de uma folha qualquer e uma imersão f de S em H. Se $X \subseteq V(H)$ é tal que $|X| \leq 2n-2$ e $C_f(X) = 0$, então temos $|X| \leq n-1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como H é um grafo expansor e $|X| \leq 2n-2$, temos

$$|\Gamma_H(X)| \geq (d+1)|X|.$$

Como T é uma árvore pequena e a árvore S é obtida de T pela remoção de uma folha, temos $v(S) \leq n-1$ e assim

$$A_f(X) = |\Gamma_H(X) \backslash f(V(S))| \geq (d+1)|X| - (n-1). \tag{48}$$

Por outro lado, para todo $x \in X$ temos $J_f(x) \geq 0$, o que implica $B_f(x) \leq d$. Desta forma, temos

$$B_f(X) \leq d|X|. \tag{49}$$

Como $C_f(X) = 0$, temos $A_f(X) = B_f(X)$ e, juntamente com (48) e (49), temos $|X| \leq n-1$. □

LEMA 36. *Suponha que sejam dados um grafo H, uma árvore T e uma imersão f de T em H. Então a função C_f é submodular, isto é,*

$$C_f(X \cup Y) + C_f(X \cap Y) \leq C_f(X) + C_f(Y)$$

para quaisquer $X, Y \subseteq V(H)$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $B_f(X)$ é definido por uma soma sobre os elementos de X, para todo $X \subseteq V(H)$, temos que B_f é modular, ou seja,

$$B_f(X \cup Y) + B_f(X \cap Y) = B_f(X) + B_f(Y)$$

para quaisquer $X, Y \subseteq V(H)$.

Observando que $C_f(X) = A_f(X) - B_f(X)$ para todo $X \subseteq V(H)$, temos que basta provar que A_f é submodular. Mas note que isto é uma conseqüência imediata das relações $\Gamma_H(X \cup Y) = \Gamma_H(X) \cup \Gamma_H(Y)$ e $\Gamma_H(X \cap Y) \subseteq \Gamma_H(X) \cap \Gamma_H(Y)$, onde X e Y são subconjuntos quaisquer de $V(H)$. □

LEMA 37. *Suponha que sejam dados um grafo expansor H, uma árvore pequena T, uma árvore $S \subset T$ obtida de T pela remoção de uma folha qualquer e uma imersão f de S em H satisfazendo $C_f(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$. Se $X, Y \subseteq V(H)$ são tais que $|X|, |Y| \leq n-1$ e $C_f(X) = C_f(Y) = 0$, então temos $|X \cup Y| \leq n-1$ e $C_f(X \cup Y) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $|X \cup Y|, |X \cap Y| \leq 2n-2$ temos, pela hipótese do enunciado, que vale $C_f(X \cup Y), C_f(X \cap Y) \geq 0$. Pelo Lema 36, temos $C_f(X \cup Y) \leq C_f(X \cup Y) + C_f(X \cap Y) \leq C_f(X) + C_f(Y) = 0$. Portanto, temos $C_f(X \cup Y) = 0$. O Lema 35 implica $|X \cup Y| \leq n-1$. □

Em posse das definições e dos lemas listados acima, podemos finalmente demonstrar o Teorema 34.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 34: Suponha que seja dado um grafo H nas condições do enunciado. Vamos mostrar, por indução em $v(T)$, que, para toda árvore pequena T, existe uma imersão f de T em H satisfazendo $C_f(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$.

- **Caso 1:** $v(T) = 1$. Como H é um grafo não-vazio, temos que existe uma imersão f de T em H. Vamos mostrar que $C_f(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$.

  Suponha, então, $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$. Como H é expansor, temos

$$|\Gamma_H(X)| \geq (d+1)|X|.$$

  Como $f(V(T))$ corresponde a apenas um vértice de H, temos

$$A_f(X) = |\Gamma_H(X) \backslash f(V(T))| \geq d|X|.$$

  Por outro lado, temos $J_f(x) = 0$ para todo $x \in V(H)$, o que implica

$$B_f(X) = d|X|.$$

  Portanto, temos $C_f(X) = A_f(X) - B_f(X) \geq 0$.

- **Caso 2:** $v(T) > 1$. Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que $v(T)$. Sejam $S \subset T$ obtido pela remoção de uma folha v de T e $w \in V(T)$ o único vértice vizinho de v em T. Pela hipótese de indução, temos que existe uma imersão f de S em H satisfazendo $C_f(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$.

  Considere G o conjunto de imersões de T em H que são extensões de f e seja $Y = \Gamma_H(f(w)) \backslash f(V(S))$. Observe que, para todo $g \in G$, a função $g \mapsto g(v)$ é claramente uma bijeção entre G e Y. Vamos mostrar que existe $g \in G$ tal que $C_g(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$.

  Suponha, por absurdo, que não exista $g \in G$ tal que $C_g(X) \geq 0$ para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$. Então, para todo $g \in G$, existe um conjunto $X_g \subseteq V(H)$ com $|X_g| \leq 2n-2$ tal que $C_g(X_g) < 0$. Por outro lado, temos $C_f(X_g) \geq 0$ para todo $g \in G$. Como $g(V(T)) = f(V(S)) \cup g(v)$, temos, para todo $X \subseteq V(H)$ com $|X| \leq 2n-2$ e todo $g \in G$,

$$A_g(X) = A_f(X) - I(g(v), \Gamma_H(X)),$$

  onde $I(z, Z)$ é 1 se $z \in Z$ e 0 no caso contrário. Como $E(T) = E(S) \cup \{\{w, v\}\}$, temos

$$B_g(X) = B_f(X) - I(f(w), X) - I(g(v), X).$$

  Desta forma, temos

$$C_g(X) = C_f(X) - I(g(v), \Gamma_H(X)) + I(f(w), X) + I(g(v), X).$$

  Observe que, para todo $g \in G$, temos $C_g(X_g) < 0$ e $C_f(X_g) \geq 0$, o que implica que temos obrigatoriamente $C_f(X_g) = 0$, $I(g(v), \Gamma_H(X_g)) = 1$, $I(f(w), X_g) = 0$ e $I(g(v), X_g) = 0$. Desta forma temos que, para todo $g \in G$, vale $C_f(X_g) = 0$, $g(v) \in \Gamma_H(X_g)$, $f(w) \notin X_g$ e $g(v) \notin X_g$.

Como, para todo $g \in G$, temos $C_f(X_g) = 0$ e $|X_g| \leq 2n - 2$, o Lema 35 implica $|X_g| \leq n - 1$. Agora considere o conjunto

$$X^* = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Vamos mostrar que $C_f(X^*) = 0$ e $|X^*| \leq n - 1$. De fato, se $|G| = 0$ não há o que provar. Se $|G| \geq 1$, o resultado segue por indução usando o Lema 37.

Agora considere $X' = X^* \cup \{f(w)\}$. Observe que, por termos $|X'| \leq n$ e pela escolha de f, vale $C_f(X') \geq 0$. Mas como $g(v) \in \Gamma_H(X_g)$ para todo $g \in G$, temos $Y \subseteq \Gamma_H(X^*)$, o que implica

$$A_f(X') = A_f(X^*).$$

Observe que, pelo fato de termos $f(w) \notin X_g$ para todo $g \in G$, temos $f(w) \notin X^*$, o que implica

$$B_f(X') = B_f(X^*) + B_f(f(w)).$$

Como T é pequena, temos que w possui grau menor ou igual d em T e, portanto, grau menor ou igual a $d - 1$ em S. Desta forma temos $J_f(f(w)) \leq d - 1$, o que implica $B_f(f(w)) \geq 1$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} C_f(X') &= A_f(X') - B_f(X') \\ &= A_f(X^*) - B_f(X^*) - B_f(f(w)) < C_f(X^*) = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

□

APÊNDICE D

Algumas Relações entre $\mathcal{EH}$ e $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}$

1. Introdução

O nosso objetivo neste apêndice consiste no estudo de algumas relações entre as classes $\mathcal{EH}$ e $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}$. O primeiro resultado que apresentamos nos mostra como é possivel obter os grafos de uma classe $\mathcal{EH}$ em uma classe $\mathcal{EH}^{\mathrm{var}}$.

Teorema 38. *Seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos qualquer. Então $\mathcal{EH}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$.*

Um problema que decorre do estudo que realizamos no Capítulo 2 consiste em saber se a inclusão do Teorema 38 é própria. O segundo resultado deste apêndice implica que para o menor caso possível, onde tomamos $\mathcal{G} = \{K^1\}$, a inclusão no Teorema 38 não é própria.

Teorema 39. $\mathcal{EH}(\{K^1\}) = \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$.

Curiosamente, o terceiro resultado que apresentamos neste apêndice implica que se $\mathcal{G}$ for composto pelo K^1 e por algum grafo não pertencente a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ então a inclusão no Teorema 38 é própria.

Teorema 40. *Para todo grafo $G \notin \mathcal{EH}(\{K^1\})$ temos $\mathcal{EH}(\{K^1, G\}) \subset \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\})$.*

O último resultado deste apêndice fornece uma caracterização diferente para os grafos pertencentes à classe $\mathcal{EH}(\{K^1\})$. Vale mencionar que esta classe é equivalente à classe dos grafos *simples* definida em Erdős e Hajnal [**5**].

Teorema 41. *Um dado grafo G pertence a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ se e somente se G não possui um subgrafo induzido isomorfo a P^4.*

O restante deste apêndice está basicamente dividido em quatro seções, que trazem as demonstrações dos Teoremas 38, 39, 40 e 41, respectivamente.

2. A prova do Teorema 38

Para provarmos o Teorema 38 precisamos de um lema auxiliar. Salientamos que o lema listado abaixo também é utilizado nas seções subseqüentes deste apêndice.

Lema 42. *Seja* $\mathcal{G}$ *um conjunto de grafos qualquer. Se* $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ *e* $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$ *então existem* i, $i' \in \mathbb{N}$ *tais que* $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ *e* $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}_{i'}(\mathcal{G})$*. Ademais, se* $H \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$*,* $H' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$ *e* $v \in V(G')$ *então* $K(G,H)$*,* $I(G,H) \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ *e* $G'(v \to H') \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$*.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G}$ nas condições do enunciado. Primeiramente vamos mostrar que para todo $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$. De fato, suponha, por contradição, que exista $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ tal que $G \notin \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que isto é um absurdo, pois $\mathcal{EH}(\mathcal{G})$ é definida como a *menor* classe de grafos que contém $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Analogamente, temos que para todo $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G})$ existe $i' \in \mathbb{N}$ tal que $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}_{i'}(\mathcal{G})$.

Agora, considere G, H, G', H' e v nas condições do enunciado e sejam $i, j, i', j' \in \mathbb{N}$ tais que $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$, $H \in \mathcal{EH}_j(\mathcal{G})$, $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}_{i'}(\mathcal{G})$ e $H' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}_{j'}(\mathcal{G})$. Defina $k := \max\{i, j\}$ e $k' := \max\{i', j'\}$. Temos, então

$$\big\{K(G,H), I(G,H)\big\} \subseteq \mathcal{EH}_{k+1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G})$$

e

$$G'(v \to H') \in \mathcal{EH}^{\text{var}}_{k'+1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G}).$$

□

Em posse do Lema 42, podemos demonstrar o Teorema 38.

Demonstração do Teorema 38: Seja $\mathcal{G}$ nas condições do enunciado. Primeiramente vamos mostrar, por indução em i, que $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- Caso 1 ($i = 0$):
  Neste caso, temos $\mathcal{EH}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}_0(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\}) \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$.

- Caso 2 ($i > 0$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que i e seja $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ qualquer. Vamos mostrar que $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$.

  Pela definição de $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ com $i > 0$ temos que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$.

  Agora considere $v_1, v_2 \notin V(G)$ com $v_1 \neq v_2$ quaisquer. Se $G = I(G[V_1], G[V_2])$, tome $H = I^2 = (\{v_1, v_2\}, \emptyset)$; caso contrário, tome $H = K^2 = (\{v_1, v_2\}, \{\{v_1, v_2\}\})$. Observe que em ambos os casos temos $H \in \{K^2, I^2\} \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}_0(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\}) \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$. Observe também que

(50) $$G = [H(v_1 \to V_1)](v_2 \to V_2).$$

Pela hipótese de indução temos $G[V_1], G[V_2] \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$. Aplicando duas vezes o Lema 42 em (50), temos $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$.

Como $\mathcal{EH}(\mathcal{G})$ é a *menor* classe de grafos que contém $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $\mathcal{EH}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\mathcal{G} \cup \{K^2, I^2\})$. □

3. A prova do Teorema 39

Considere o seguinte lema.

LEMA 43. *$\mathcal{EH}(\{K^1\}) \supseteq \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$.*

Observe que o lema acima juntamente com o Teorema 38 implicam o Teorema 39. Mas, antes de provarmos o Lema 43, vamos enunciar e provar alguns lemas auxiliares.

LEMA 44. *Se $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\}) \backslash \{K^1, K^2, I^2\}$ então existem G_1, $G_2 \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{\{K^1, K^2, I^2\})$ com $v(G_1)$, $v(G_2) > 1$ e $v \in V(G_1)$ tais que $G = G_1(v \to G_2)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Lembrando que $\mathcal{EH}_0^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\}) = \{K^1, K^2, I^2\}$ basta mostrarmos, por indução em i, que a afirmação do enunciado vale para todo $G \in \mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\}) \backslash \{K^1, K^2, I^2\}$ com $i \geq 1$.

- Caso 1 ($i = 1$):
  Seja $G \in \mathcal{EH}_1^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\}) \backslash \{K^1, K^2, I^2\}$ qualquer. Pela definição de $\mathcal{EH}_1^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ existem G_1, $G_2 \in \mathcal{EH}_0^{\text{var}}(\{\{K^1, K^2, I^2\}) = \{\{K^1, K^2, I^2\}$ e $v \in V(G_1)$ tais que $G = G_1(v \to G_2)$. Observe que G_1, $G_2 \neq K^1$, pois caso contrário, teríamos $G = K^1(v \to G_2) = G_2$ ou $G = G_1(v \to K^1) = G_1$. Observe que em ambos os casos teríamos $\subseteq \{K^1, K^2, I^2\}$, contrariando a escolha de G.

- Caso 2 ($i > 1$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que i e seja $G \in \mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\}) \backslash \{K^1, K^2, I^2\}$.
  Observe que, pela definição de $\mathcal{EH}_i^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$, temos que existem G_1, $G_2 \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j^{\text{var}}(\{\{K^1, K^2, I^2\})$ e $v \in V(G_1)$ tais que $G = G_1(v \to G_2)$. Se $v(G_1)$, $v(G_2) > 1$ não há o que fazer. Caso contrário, temos $G = K^1(v \to G_2) = G_2$ ou $G = G_1(v \to K^1) = G_1$. Como $G \notin \{K^1, K^2, I^2\}$ o resultado segue, em ambos os casos, pela hipótese de indução.

□

LEMA 45. *Se $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ com $v(G) > 1$ então existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$.*

Demonstração: Vamos mostrar, por indução em $v(G)$, que a afirmação do enunciado vale para todo $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ com $v(G) > 1$.

- Caso 1 ($v(G) = 2$):
  Decorre de $G \in \{K(K^1, K^1), I(K^1, K^1)\}$ e do fato de termos $K^1 \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$.

- Caso 2 ($v(G) > 2$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que $v(G)$. Observe que $G \notin \{K^1, K^2, I^2\}$ e, pelo Lema 44, temos que existem G_1, $G_2 \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{\{K^1, K^2, I^2\})$ com $v(G_1)$, $v(G_2) > 1$ e $v \in V(G_1)$ tais que $G = G_1(v \to G_2)$. Como claramente $1 < v(G_1) < v(G)$ temos, pela hipótese de indução, que existe uma partição própria $\{V_1', V_2'\}$ de $V(G_1)$ tal que $G_1[V_1']$, $G_1[V_2'] \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ e $G_1 = K(G_1[V_1'], G_1[V_2'])$ ou $G_1 = I(G_1[V_1'], G_1[V_2'])$.

  Se $v \in V_1'$, faça $G' = G_1[V_1'](v \to G_2)$ e $G'' = G_1[V_2']$; caso contrário, faça $G' = G_1[V_1']$ e $G'' = G_1[V_2'](v \to G_2)$. Observe que em ambos os casos o Lema 42 garante G', $G'' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$. Observe também que temos $G = K(G', G'')$ ou $G = I(G', G'')$. Ou seja, se tomarmos $V_1 = V(G')$ e $V_2 = V(G'')$ temos que $\{V_1, V_2\}$ é uma partição própria de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$.

$\square$

Em posse dos lemas listados acima, podemos demonstrar o Lema 43.

Demonstração do Lema 43: Vamos mostrar, por indução em $v(G)$, que se $G \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ então $G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 1 ($v(G) = 1$):
  Neste caso, temos $G = K^1 \in \mathcal{EH}_0(K^1) \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 2 ($v(G) > 1$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que $v(G)$. Pelo Lema 45 temos que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2\})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$. Observe que $v(G[V_1]) = |V_1| < v(G)$ e $v(G[V_2]) = |V_2| < v(G)$. Pela hipótese de indução temos $G[V_1]$, $G[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$ e, pelo Lema 42, temos

  $$G \in \{K(G[V_1], G[V_2]), I(G[V_1], G[V_2])\} \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1\}).$$

$\square$

4. A prova do Teorema 40

Para demonstrarmos o Teorema 40 precisamos introduzir uma nova notação. Dados $i \in \mathbb{N}$ e uma família de grafos $\mathcal{G}$ quaisquer, definimos $\mathcal{G}_i := \{G \in \mathcal{G} : v(G) \leq i\}$. $\mathcal{G}_i$

Agora considere os seguintes lemas auxiliares.

Lema 46. *Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos e $k \in \mathbb{N}$ quaisquer. Então $\mathcal{EH}(\mathcal{G})_k \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k)$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{G}$ e k nas condições do enunciado. Primeiramente vamos mostrar, por indução em i, que $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})_k \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- Caso 1 ($i = 0$):
  Temos claramente $\mathcal{EH}_0(\mathcal{G})_k = \mathcal{G}_k = \mathcal{EH}_0(\mathcal{G}_k) \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k)$.

- Caso 2 ($i > 0$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que i e seja $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})_k$ qualquer — observe que $v(G) \leq k$. Como $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})_k \subseteq \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ temos, pela definição de $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ com $i > 0$, que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1], G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$. Mas $v(G[V_1]) = |V_1| < v(G) \leq k$ e $v(G[V_2]) = |V_2| < v(G) \leq k$. Portanto, pela hipótese de indução, temos $G[V_1], G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G})_k \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k)$. Pelo Lema 42 temos
  $$G \in \{K(G[V_1], G[V_2]), I(G[V_1], G[V_2])\} \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k).$$

Como $\mathcal{EH}(\mathcal{G})_k$ é a *menor* família de grafos que contém $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})_k$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $\mathcal{EH}(\mathcal{G})_k \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_k)$. □

Lema 47. *Seja $\mathcal{G}$ um conjunto de grafos qualquer. Se $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G}) \backslash \mathcal{G}$ então existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1], G[V_2] \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$. Ademais, temos $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G}_{v(G)-1})$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G}$ nas condições do enunciado e suponha $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G}) \backslash \mathcal{G}$ qualquer. Como $G \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ temos, pelo Lema 42, que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $G \in \mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$. Mas observe que $G \notin \mathcal{G} = \mathcal{EH}_0(\mathcal{G})$ e, portanto, temos $i > 0$. Pela definição de $\mathcal{EH}_i(\mathcal{G})$ com $i > 0$ temos que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1], G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$.

Como $v(G[V_1]), v(G[V_2]) < v(G)$ temos, pelo Lema 46, que $G[V_1], G[V_2] \in \mathcal{EH}(\mathcal{G})_{v(G)-1} \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_{v(G)-1})$. Pelo Lema 42 segue
$$G \in \{K(G[V_1], G[V_2]), I(G[V_1], G[V_2])\} \subseteq \mathcal{EH}(\mathcal{G}_{v(G)-1}).$$

$\square$

LEMA 48. *Seja* $G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$ *qualquer. Se* $V \subseteq V(G)$ *com* $V \neq \emptyset$ *então* $G[V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

DEMONSTRAÇÃO: Primeiramente vamos mostrar, por indução em i, que se $G \in \mathcal{EH}_i(\{K^1\})$ e $V \subseteq V(G)$ com $V \neq \emptyset$ então $G[V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

- Caso 1 ($i = 0$):
  Como $\mathcal{EH}_0(\{K^1\}) = \{K^1\}$ temos que as únicas escolhas para $G \in \mathcal{EH}_0(\{K^1\})$ e $V \subseteq V(G)$ com $V \neq \emptyset$ são $G = K^1$ e $V = V(G)$. Neste caso temos $G[V] = G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 2 ($i > 0$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que i e sejam $G \in \mathcal{EH}_i(\{K^1\})$ e $V \subseteq V(G)$ com $V \neq \emptyset$ quaisquer. Vamos mostrar que $G[V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$. Pela definição de $\mathcal{EH}_i(\{K^1\})$ com $i > 0$ temos que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ tal que $G[V_1]$, $G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\{K^1\})$ e $G = K(G[V_1], G[V_2])$ ou $G = I(G[V_1], G[V_2])$. Temos dois casos possíveis:

  - Caso 2.1 ($V_1 \cap V = \emptyset$ ou $V_2 \cap V = \emptyset$).
    Pela escolha de V e pelo fato de V_1 e V_2 formarem uma partição própria dos vértices de G temos que não pode ocorrer $V_1 \cap V = \emptyset$ e $V_2 \cap V = \emptyset$. Se $V_1 \cap V = \emptyset$ tome $V' = V_2$ e se $V_2 \cap V = \emptyset$ tome $V' = V_1$ — observe que temos $V \subseteq V'$ e $V \neq \emptyset$. Como $G[V'] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\{K^1\})$ temos, pela hipótese de indução, que $G[V] = (G[V'])[V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

  - Caso 2.2 ($V_1 \cap V \neq \emptyset$ e $V_2 \cap V \neq \emptyset$).
    Como $G[V_1]$, $G[V_2] \in \bigcup_{j<i} \mathcal{EH}_j(\{K^1\})$ temos, pela hipótese de indução, que $G[V_1 \cap V]$, $G[V_2 \cap V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$. Observando que $G[V] \in \{K(G[V_1 \cap V], G[V_2 \cap V]), I(G[V_1 \cap V], G[V_2 \cap V])\}$ temos, pelo Lema 42, que $G[V] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

O resultado segue pelo fato de $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ ser a *menor* família de grafos que contém $\mathcal{EH}_i(\{K^1\})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Em posse dos lemas listados acima podemos demonstrar o Teorema 40.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 40: Seja G nas condições do enunciado. Pelo Teorema 38 temos $\mathcal{EH}(\{K^1, G\}) \subseteq \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\})$. Portanto, para mostrarmos que $\mathcal{EH}(\{K^1, G\}) \subset \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\})$, basta provarmos que existe um grafo $G' \in \mathcal{EH}^{\mathrm{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\}) \setminus \mathcal{EH}(\{K^1, G\})$.

Considere v_1, $v_2 \notin V(G)$ com $v_1 \neq v_2$ e $v \in V(G)$ quaisquer. Se $d_G(v) = v(G) - 1$ então defina $H = (\{v_1, v_2\}, \emptyset)$; caso contrário faça $H =$

$(\{v_1, v_2\}, \{\{v_1, v_2\}\})$. Tome $G' = G(v \to H)$. Como G, $H \in \{K^2, I^2, G\} \subset \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\})$ temos, pelo Lema 42, $G' \in \mathcal{EH}^{\text{var}}(\{K^1, K^2, I^2, G\})$. Vamos mostrar que $G' \notin \mathcal{EH}(\{K^1, G\})$.

Suponha, por absurdo, que $G' \in \mathcal{EH}(\{K^1, G\})$. Como claramente $G' \notin \{K^1, G\}$ temos, pelo Lema 47, que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(G')$ tal que $G'[V_1]$, $G'[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1, G\})$ e $G' = K(G'[V_1], G'[V_2])$ ou $G' = I(G'[V_1], G'[V_2])$.

Vamos mostrar primeiramente que $G'[V_1]$, $G'[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$. Temos dois casos a considerar.

- Caso 1 ($|V_1| = 1$ ou $|V_2| = 1$):
  Suponha, sem perda de generalidade, $|V_1| = 1$ e seja v' o único vértice pertencente a V_1. Observe que $\{v_1, v_2\} \cap V_2 \neq \emptyset$ e suponha, sem perda de generalidade, que $v_2 \in V_2$. Vamos mostrar que $G'[V_2]$ não é isomorfo a G.

  De fato, observe que G é isomorfo a $G'[V(G')\backslash\{v_2\}] = G'[\{v'\} \cup V_2\backslash\{v_2\}]$ e, portanto, temos

  (51) $$e(G) = e(G'[V_2]) + d_{G'}(v') - d_{G'}(v_2).$$

  Observe também que pela escolha de H temos

  $$1 \leq d_{G'}(v_2) \leq v(G) - 1 = v(G') - 2.$$

  Como $G' = K(G'[\{v'\}], G'[V_2])$ ou $G' = I(G'[\{v'\}], G'[V_2])$ temos que $d_{G'}(v') = 0$ ou $d_{G'}(v') = v(G') - 1$ e, portanto, vale

  (52) $$d_{G'}(v') \neq d_{G'}(v_2).$$

  Aplicando (52) em (51), temos que $e(G) \neq e(G'[V_2])$, o que prova que G e $G'[V_2]$ não são isomorfos.

  Agora, como $|V_2| = v(G) > 1$ temos $G'[V_2] \notin \{K^1, G\}$ e, pelo Lema 47, segue que $G'[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1, G\}_{v(G)-1}) = \mathcal{EH}(\{K^1\})$. Observe que $G'[V_1]$ é isomorfo a $K^1 \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 2 ($|V_1| > 1$ e $|V_2| > 1$):
  Neste caso temos $v(G'[V_1])$, $v(G'[V_2]) < v(G)$ e, pelo Lema 46, segue que $G'[V_1]$, $G'[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1, G\})_{v(G)-1} \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1, G\}_{v(G)-1}) = \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

Agora, como $G'[V_1]$, $G'[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$ temos, pelo Lema 42, que

$$G' \in \{K(G'[V_1], G'[V_2]), I(G'[V_1], G'[V_2])\} \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1\}).$$

Lembrando que G é isomorfo a $G'[V(G')\backslash\{v_2\}]$ temos, pelo Lema 48, que $G \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$, o que contraria a escolha de G. $\square$

5. A prova do Teorema 41

Para demonstrarmos o Teorema 41 vamos precisar do seguinte resultado extraído de Seinsche [**17**].

TEOREMA 49. *Considere um grafo G. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. *G não possui um subgrafo induzido isomorfo a P^4, o caminho com 4 vértices.*
2. *Para todo $X \subseteq V(G)$ com $|X| \geq 2$ vale que $G[X]$ não é conexo ou $\overline{G}[X]$ não é conexo.*

Na demonstração do Teorema 41 também utilizaremos o fato de que $P^4 \notin \mathcal{EH}(\{K^1\})$. De fato, como pode ser facilmente verificado, temos que o grafo P^4 é o único grafo não pertencente a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$ de ordem menor ou igual a 4.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 41: Primeiramente vamos provar, por indução em $v(G)$, que se G não possui um subgrafo induzido isomorfo a P^4 então G pertence a $\mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 1 ($v(G) = 1$):
  Neste caso temos $G = K^1 \in \mathcal{EH}_0(\{K^1\}) \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1\})$.

- Caso 2 ($v(G) > 1$):
  Suponha que a hipótese de indução valha para os valores menores que $v(G)$. Como, por hipótese, G não possui um subgrafo induzido isomorfo a P^4 temos, pelo Teorema 49, que G ou $\overline{G}$ não é conexo.

  Se G não é conexo faça $H = G$, caso contrário faça $H = \overline{G}$. Como H não é conexo, temos que existe uma partição própria $\{V_1, V_2\}$ de $V(H)$ tal que $H = I(H[V_1], H[V_2])$.

  Observe que $G[V_1]$ e $G[V_2]$ não possuem um subgrafo induzido isomorfo a P^4 e $|V_1|, |V_2| < v(G)$. Portanto, pela hipótese de indução temos $G[V_1], G[V_2] \in \mathcal{EH}(\{K^1\})$. Mas observe que pela escolha de H, V_1 e V_2 e pelo Lema 42 segue

  $$G \in \{K(G[V_1], G[V_2]), I(G[V_1], G[V_2])\} \subseteq \mathcal{EH}(\{K^1\}).$$

O sentido inverso da demonstração decorre do Lema 48, juntamente com o fato de $P^4 \notin \mathcal{EH}(\{K^1\})$. □

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

1. N. Alon, J. Pach, and J. Solymosi, *Ramsey-type theorems with forbidden subgraphs*, to appear.
2. V. Chvátal, *Tree-complete graph ramsey numbers*, Journal of Graph Theory **1** (1977), 93.
3. W. Deuber, *A generalization of Ramsey's theorem*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 323–332.
4. R. Diestel, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, 1996.
5. P. Erdős and A. Hajnal, *Ramsey-type theorems*, Discrete Applied Mathematics **25** (1989), no. 1–2, 37–52.
6. P. Erdős, A. Hajnal, and L. Pósa, *Strong embeddings of graphs into colored graphs*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 585–595.
7. J. Friedman and N. Pippenger, *Expanding graphs contain all small trees*, Combinatorica **7** (1987), no. 1, 71–76.
8. R.L. Graham and V. Rödl, *Numbers in Ramsey theory*, Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge–New York, 1987, pp. 112–153.
9. Hoeffding W. J., *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, Journal of the American Statistical Association **58** (1963), 713–721.
10. X. Ke, *The size Ramsey number of trees with bounded degree*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 85–97.
11. Y. Kohayakawa, H.-J. Prömel, and V. Rödl, *Induced Ramsey numbers*, Combinatorica **18** (1998), no. 3, 373–404.
12. T. Łuczak and V. Rödl, *On induced Ramsey numbers for graphs with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **66** (1996), no. 2, 324–333.
13. J. Matoušek and J. Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, Oxford.
14. C. McDiarmid, *Concentration*, Algorithms and Combinatorics (J. Ramirez-Alfonsin M. Habib, C. McDiarmid and B. Reed, eds.), vol. 16, Springer-Verlag, 1998, pp. 195–248.
15. F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society **30** (1930), 264–286.
16. V. Rödl, *The dimension of a graph and generalized Ramsey theorems*, Master's thesis, Charles University, 1973.
17. D. Seinsche, *On a property of the class of n-colorable graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **16** (1974), 191–193.