COMBINATÓRIA EXTREMAL E MÉTODOS PROBABILÍSTICOS*

Y. Kohayakawa e J. Soares

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

I. A Instituição

O Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME–USP/MAC) tem sido um centro de pesquisa de excelência nas áreas de combinatória e ciência da computação no Brasil desde a década de 70. Os pesquisadores deste departamento tiveram papel importante em atividades pioneiras na área da ciência da computação no país, como a *Escola de Computação* (um evento bienal realizado desde 1981) e *LATIN'92*, *Latin American Theoretical INformatics Symposium*, que teve lugar em 1992 na USP.

Atualmente, dois projetos dentro do Projeto Temático Multiinstitucional em Ciência da Computação, ProTeM–CC (Fase II), do CNPq, a saber, os projetos '*Teoria da Computação—Pesquisa em Algoritmos e Complexidade*' e '*Problemas Combinatórios*: *Teoria, Algoritmos e Aplicações*', são coordenados por membros deste departamento. Estes dois projetos ilustram os esforços que temos feito em integrar as atividades de pesquisa em ciência da computação no país, especialmente em seus aspectos teóricos.

De fato, uma área em que o nosso departamento tem reconhecimento internacional é a teoria da computação, incluindo as áreas de combinatória e teoria dos grafos. O departamento mantém fortes laços com centros internacionais de pesquisa, sendo quase todos os seus membros com doutorado formados no exterior. Em particular, os proponentes deste projeto obtiveram seus doutoramentos na Universidade de Cambridge e na Universidade de Chicago, respectivamente. Neste projeto, objetivamos estabelecer mais um forte laço de colaboração científica com um grupo importante em teoria da computação. Trata-se do grupo liderado pelo Professor Dr Hans Jürgen Prömel, que tem uma cadeira de Professor em Algoritmos e Complexidade junto à Universidade Humboldt em Berlim.

---

* Proposta de Projeto para o programa PROBAL do convênio CAPES–DAAD

O primeiro autor tem mantido contatos próximos com o grupo do Professor Prömel há algum tempo. Em particular, em julho de 1994 ele visitou o seu grupo por um mês através de um programa de intercâmbio entre o DAAD e a USP e, como um fruto concreto desta visita, um trabalho conjunto foi escrito e submetido para publicação em um periódico de combinatória (cf. Kohayakawa, Kreuter, e Steger [40]).

Finalmente, mencionamos que um intercâmbio próximo com o nosso parceiro alemão será importante para o nosso departamento do ponto de vista de ensino. O nosso departamento é responsável por um curso de Bacharelado em Ciência da Computação e por um curso de Mestrado em Matemática Aplicada, com concentração em Ciência da Computação, há mais de 20 anos. Hoje temos um programa de doutoramento, que conta atualmente com mais de dez alunos inscritos e que se encontram em vários estágios do programa. A vinda de pesquisadores do grupo alemão será importante para os nossos alunos de pós-graduação.

II. Plano de Trabalho

§1. Objetivos

Objetivamos neste projeto executar atividades de pesquisa conjunta com o grupo do Professor Prömel em várias tópicos da teoria da computação, com especial ênfase em problemas combinatórios. Em alguns casos, o trabalho previsto será continuação de trabalho conjunto já em andamento. Kohayakawa, Kreuter, e Steger [40] apresenta parte de pesquisa realizada quando o primeiro autor visitou o Professor Prömel em julho de 1994, através de um programa de intercâmbio entre a Universidade de São Paulo e o DAAD. Este projeto possibilitará uma colaboração científica mais próxima e duradoura entre o nosso grupo e o grupo do Professor Prömel.

Abaixo, discutimos brevemente os tópicos de pesquisa de interesse imediato dentro deste projeto: a combinatória extremal, os métodos probabilísticos, e a teoria de complexidade computacional.

A *combinatória extremal* trata de problemas combinatórios estruturais e numéricos, preocupando-se principalmente com resultados assintóticos que envolvem vários parâmetros numéricos dos objetos em consideração. Uma subárea particularmente bem desenvolvida desta área é a *teoria extremal dos grafos*. Bollobás [12] e Simonovits [63] são referências clássicas. Steger [65] contém tanto uma introdução detalhada como uma extensa coleção de resultados numa das direções de pesquisa que seguiremos dentro deste projeto.

Uma outra área da combinatória extremal em que concentraremos nossos esforços é a *teoria de Ramsey*. Ramsey [57] provou o seu bem conhecido teorema combinatório quando trabalhava em um certo problema de decidibilidade em lógica, e Erdős e Szekeres [20] redescobriram este resultado quando investigavam um problema puramente geométrico. Desde então, o teorema de Ramsey e resultados combinatórios relacionados têm se mostrado importantes em diversas áreas da matemática e da teoria da computação, devido à sua natureza fundamental. A importância e a elegância intrínseca destes resultados têm sido responsáveis pelo impressionante avanço da teoria de Ramsey—hoje uma das áreas mais sofisticadas da matemática discreta [27, 48, 56].

Uma outra área de grande atividade em combinatória e em teoria da computação atualmente é aquela caracterizada pelo uso de *métodos probabilísticos*. Há dois periódicos especializados em combinatória e em computação voltados a esta área: *Random Structures and Algorithms* (Wiley), editado por Karoński (Poznań) e Spencer (Courant), e *Combinatorics, Probability, and Computing* (Cambridge University Press), editado por Bollobás (Cambridge). Estes periódicos atestam a qualidade dos trabalhos e o grau de atividade nesta área. Para uma introdução, veja, por exemplo, Alon e Spencer [5], e Bollobás [13, 14].

A *teoria de complexidade computacional*, uma área central em teoria da computação, preocupa-se com a exitência de procedimentos eficientes para executar tarefas computacionais. Uma série de resultados impressionantes nesta área culminaram recentemente em uma nova e surpreendente caracterização da assim chamada classe NP de problemas. Este é o famoso resultado de Arora, Lund, Motwani, Sudan, e Szegedy [7] (veja também Babai [8] e Hougardy, Prömel, e Steger [35]), que afirma que todo elemento de uma linguagem NP admite um certificado de pertinência verificável probabilisticamente que requer uma quantidade mínima de 'aleatoriedade' e é o mais robusto possível. Este resultado tem conseqüências profundas: ele implica que uma ampla gama de problemas de otimização não admitem esquemas de aproximação polinomial, a menos que P = NP.

§2. Justificativas

Uma grande quantidade de pesquisa de primeira linha nos tópicos descritos no §1 está sendo feita por diversos autores. Muitos dos trabalhos publicados em periódicos de combinatória e teoria da computação como *Combinatorica* (Springer International e Akadémiai Kiadó), *Combinatorics, Probability and Computing* (Cambridge University Press), e *Random Structures and*

Algorithms (Wiley) versam sobre problemas da combinatória extremal, e muitos deles usam métodos probabilísticos de forma essencial. Por outro lado, muitos dos trabalhos apresentados nas séries *Symposia on Foundations of Computer Science* e *Symposia on the Theory of Computing*, duas das pricipais séries de encontros internacionais em teoria da computação, seguem a linha de pesquisa do trabalho de Arora *et al.* mencionado acima.

Os tópicos que pretendemos investigar neste projeto são centrais em matemática discreta e em teoria da computação. O Departamento de Ciência da Computação do IME–USP terá assim mais uma forma de participar de pesquisa internacional conjunta em áreas de importância reconhecida.

§3. Metas

A nossa meta principal é a execução de pesquisa de ponta em combinatória e em teoria da computação. (Veja §5 para os tópicos específicos de pesquisa que contemplamos neste projeto.) Naturalmente, objetivamos como fruto concreto deste trabalho a elaboração de trabalhos a serem publicados em periódicos internacionais de alta qualidade e a sua divulgação em conferências internacionais de renome.

Uma cooperação próxima com o nosso parceiro alemão terá também como conseqüência um fortalecimento do nosso grupo nas áreas específicas deste projeto. Em particular, os nossos programas de mestrado e doutorado certamente se beneficiarão.

§4. Metodologia

Os métodos usados no estudo de problemas combinatórios extremais variam desde o uso de métodos combinatórios puros até o uso de técnicas sofisticadas de outras áreas, como a geometria algébrica e a teoria dos números, a topologia algébrica, e a teoria de probabilidades. O nosso projeto põe especial ênfase nos métodos probabilísticos e suas ramificações.

Neste projeto, prevemos o estudo de diversos problemas combinatórios através, dentre outros, de métodos probabilísticos como desigualdades exponencias para grandes desvios, martingais, crivos locais, *etc.* Uma técnica que pode ser vista como um refinamento do método probabilístico é o uso de *enumeração assintótica*, uma das especialidades do nosso parceiro alemão. As técnicas de enumeracão assintótica que têm sido desenvolvidas pelo grupo do Professor Prömel são muito poderosas, e conseguem demonstrar resultados que, embora tenham caráter probabilístico, estão fora do alcance de métodos puramente probabilísticos.

Finalmente, mencionamos o uso do lema de regularidade de Szemerédi como um método comum a muitos dos trabalhos desenvolvidos por nós e pelos nossos parceiros alemães. Este lema, embora de natureza determinística, têm um sabor probabilístico, pois afirma que todo grafo pode ser decomposto em uma quantidade limitada de subgrafos pseudo-aleatórios.

§5. Conteúdo Básico

Nas seções seguintes detalhamos vários tópicos específicos de pesquisa e discutimos alguns problemas e conjecturas em que trabalharemos neste projeto.

5.1. *Problemas numéricos em teoria de Ramsey.* Sejam G e H dois grafos dados. Escrevemos $G \to H$ se em qualquer 2-coloração das arestas de G podemos encontrar um subgrafo monocromático em G isomorfo a H. Se exigimos ainda que o subgrafo encontrado seja um subgrafo induzido de G, escrevemos $G \xrightarrow{\text{ind}} H$. Assim, o bem conhecido teorema de Ramsey implica que, para qualquer grafo H, temos $G \to H$ desde que G seja um grafo completo suficientemente grande. Por outro lado, um resultado clássico provado independentemente por Deuber [18], Erdős, Hajnal, e Pósa [19], e Rödl [58] afirma que para qualquer grafo H existe um grafo G tal que $G \xrightarrow{\text{ind}} H$. Aqui estamos interessados em problemas numéricos que surgem quando as duas relações $\to$ e $\xrightarrow{\text{ind}}$ são consideradas.

Dado um grafo G, como de usual, a *ordem* $|G|$ de G é o número de vértices em G, e o seu *tamanho* $e(G)$ é o número de arestas em G. Fixe um grafo H. Seja $r(H)$ a menor possível ordem de um grafo G satisfazendo $G \to H$, e $r_{\mathrm{e}}(H)$ o menor possível tamanho de um tal grafo G. Assim $r(H) = \min\{|G|\colon G \to H\}$ e $r_{\mathrm{e}}(H) = \min\{e(G)\colon G \to H\}$. Substituindo-se a relação $\to$ por $\xrightarrow{\text{ind}}$, obtemos os parâmetros $r^{\mathrm{ind}}(H)$ e $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(H)$. Vários problemas importantes em teoria de Ramsey tratam da investigação destes parâmetros.

Árvores e circuitos. Beck [10] provou usando grafos aleatórios que $r_{\mathrm{e}}(P^\ell) = O(\ell)$, onde P^ℓ denota o caminho de ordem ℓ, resolvendo assim um problema de Erdős. Em [10] e tambémm mais tarde em [11], Beck investigou $r_{\mathrm{e}}(T)$ para árvores genéricas T essencialmente identificando o parâmetro da árvore T que determina a ordem de magnitude de $r_{\mathrm{e}}(T)$. Suponha que T tenha, como um grafo bipartido, classes de bipartição de cardinalidades t_0 e t_1, e sejam Δ_0 e Δ_1 os máximos dos graus dos vértices nestas classes. Ponha $\beta(T) = t_0\Delta_0 + t_1\Delta_1$. A seguinte conjectura foi posta por Beck [11] (veja também Ke [38]).

Conjectura 1. *Para qualquer árvore T temos $r_{\mathrm{e}}(T) = O\{\beta(T)\}$.*

Se verdadeira, esta conjectura é ótima a menos de um fator constante, já que, como observado por Beck [11], vale que $r_{\mathrm{e}}(T) \geq \beta(T)/4$. Atualmente, o melhor resultado na direção desta conjectura é devido a Haxell e Kohayakawa [31], onde prova-se que $r_{\mathrm{e}}(T) = O\left(\min\{\beta(T)\log\Delta(T), |T|\Delta(T)\}\right)$. Beck [11] também considerou $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T)$ para árvores genéricas T, provando que $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T) = O\{|T|^3(\log|T|)^4\}$ para qualquer árvore T, e que há árvores T para os quais $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T) = \Omega(|T|^2)$. É um problema desafiador determinar $f(n) = \max r^{\mathrm{ind}}(T)$ e $f_{\mathrm{e}}(n) = \max r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T)$, onde o máximo é sobre todas as árvores T de ordem n.

Estendendo o resultado acima de Beck sobre caminhos, Bollobás, Burr, e Reimer [15] provaram que $r_{\mathrm{e}}(C^\ell) = O(\ell)$, onde C^ℓ é o circuito de comprimento ℓ. Recentemente, este resultado foi generalizado por Haxell, Kohayakawa, e Łuczak [32], que provaram que $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(C^\ell) = O(\ell)$. Este último resultado resolve um problema posto por Graham e Rödl [26], que perguntaram se $r^{\mathrm{ind}}(P^\ell) = O(\ell)$.

Grafos genéricos. O problema de se estimar $f(n) = \max r^{\mathrm{ind}}(H)$, onde o máximo é sobre *todos* os grafos H de ordem n, é também de grande interesse. É conhecido que $f(n) \leq 2^{2^{n^{1+o(1)}}}$ (cf. [26]). O seguinte problema é devido a Graham e Rödl.

Problema 2. *Existe uma contante C para o qual vale que $f(n) \leq C^n$?*

Rödl provou através de seus métodos de [58] que $r^{\mathrm{ind}}(H) \leq C^{|H|}$ para alguma constante C se H é um grafo bipartido. Łuczak e Rödl [47] provaram recentemente que $r^{\mathrm{ind}}(H) \leq |H|^d$ para alguma constante $d = d(\Delta(H))$ que depende apenas do grau máximo $\Delta(H)$ de H, resolvendo assim positivamente um problema levantado por Trotter (cf. [26]).

Orientações de grafos. Seja agora G um grafo e D um *digrafo*, um grafo cujas arestas foram orientadas de alguma forma arbitrária mas fixa. Escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{or}} D$ se podemos encontrar uma cópia *induzida* de D em qualquer orientação das arestas de G. Ademais, escreva $G \xrightarrow{\mathrm{acy}} D$ se a afirmativa acima vale para qualquer orientação *acíclica* de G. No que segue, restringimos a nossa atenção a digrafos acíclicos D, *i.e.* grafos dirigidos D que não contém nenhum circuito dirigido. Ponha $r^{\mathrm{or}}(D) = \min|G|$, onde o mínimo é tomado sobre todos os grafos G tais que $G \xrightarrow{\mathrm{or}} D$, e ponha $r_{\mathrm{a}}^{\mathrm{or}}(D) = \min|G|$, onde o mínimo é tomado sobre todos os grafos G para os quais $G \xrightarrow{\mathrm{acy}} D$. Obter estimativas precisas para $\max r^{\mathrm{or}}(D)$ e $\max r_{\mathrm{a}}^{\mathrm{or}}(D)$, onde os máximos são tomados sobre todos os digrafos de ordem n, mostra ser um problema difícil.

Seja $f_{\mathsf{a}}(n)$ a ordem mínima de um grafo G tal que $G\xrightarrow{\text{acy}}D$ *simultaneamente* para todo digrafo acíclico D de ordem n, isto é, tal que toda orientação acíclica de G contém uma cópia induzida de todo digrafo acíclico D de ordem n. Brightwell e Kohayakawa [17], usando uma variação do método de martingais devido a Bollobás, determinaram o valor de $f_{\mathsf{a}}(n)$ a menos de um fator multiplicativo constante.

Recentemente, Kohayakawa, Luczak, e Rödl [42] provaram que existe um grafo com $O(n^4 \log n)$ vértices e $O(n^6 (\log n)^2)$ arestas tal que $G\xrightarrow{\text{or}}\vec{T}^n$ simultaneamente para toda árvore orientada $\vec{T}^n$ de ordem n. Assim, em particular, temos $r^{\text{or}}(\vec{T}^n) = O(n^4 \log n)$ para qualquer tal árvore $\vec{T}^n$. Ademais, também é provado em [42] que existe um grafo G com $O(n^2 \log n)$ vértices e $O(n^3 (\log n)^2)$ arestas tal que $G\xrightarrow{\text{acy}}\vec{T}^n$ simultaneamente para toda tal árvore $\vec{T}^n$. Este último resultado é quase ótimo, já que, como demonstrado em [42], todo grafo G com $G\xrightarrow{\text{acy}}\vec{P}^n$, onde $\vec{P}^n$ é o caminho dirigido de ordem n, necessariamente tem mais de $n^2/2$ vértices e mais de $\lfloor n/3 \rfloor^3$ arestas se $n \geq 3$.

5.2. *Resultados do tipo anti-Ramsey.* Aqui estamos interessados em encontrar subgrafos *multicoloridos* em grafos cujas arestas foram coloridas, *i.e.* subgrafos cujas arestas receberam cores todas distintas.

Grafos anti-Ramsey esparsos. Sejam G e H dois grafos. Escrevemos $G\xrightarrow{\text{mc}}H$ se em qualquer coloração *própria* das arestas de G podemos encontrar um subgrafo multicolorido de G isomorfo a H. Seja $\hat{g}(H) = \inf\{g(G)\colon G\xrightarrow{\text{mc}}H\}$, onde $g(G)$ é a cintura de G. O fato de que para todo grafo H temos $\hat{g}(H) < \infty$ é fácil de se observar, mas decidir se $\hat{g}(C^\ell) \to \infty$ conforme $\ell \to \infty$ era um problema devido a Spencer. Este problema foi resolvido por Rödl e Tuza [60] (veja também Haxell e Kohayakawa [30]), que também propuseram a seguinte conjectura muito atraente.

Conjectura 3. *Para todo grafo H temos $\hat{g}(H) = g(H)$.*

A conjectura acima é provada no caso em que H é um circuito C^ℓ ($\ell \geq 3$) em Kohayakawa e Luczak [41]. O método usado em [41] é probabilístico, e não é claro se este método pode ser usado para atacar a conjectura de Rödl e Tuza em toda a sua generalidade. Os métodos de Prömel e Voigt [55], além de serem construtivos, podem ser os métodos mais promissores para se resolver este problema.

Problemas e resultados relacionados. Fechamos esta seção mencionando dois outros problemas. Seja K^n o grafo completo de ordem n. Seja $b = b(n)$ o maior inteiro com a propriedade de que, em qualquer coloração das arestas de K^n com nenhuma cor aparecendo mais do que b vezes, sempre existe um circuito Hamiltoniano multicolorido em K^n. Naturalmente, estamos interessados em saber o quão grande é $b = b(n)$. Hahn e Thomassen [28] conjecturam que $b(n) = \Omega(n)$. O melhor resultado até o momento é devido a Frieze e Reed [22], que, usando métodos da teoria dos grafos aleatórios, provaram que $b(n) = \Omega(n/\log n)$.

Finalmente, mencionamos que um resultado do tipo anti-Ramsey para hipergrafos foi provado por Alon, Lefmann, e Rödl [4] através do uso de resultados poderosos de Ajtai, Komlós, Pintz, Spencer, e Szemerédi [2]. Os métodos usados em [4] devem ser úteis em muitos outros contextos. De fato, em Kohayakawa, Kreuter, e Steger [40], usa-se uma técnica desenvolvida em [4].

5.3. *Problemas extremais tipo Turán para grafos aleatórios.* Se G e H são grafos, dizemos que G é livre de H se G não contém nenhum subgrafo isomorfo a H. Seja $G_p = G_{n,p}$ o grafo aleatório binomial usual de ordem n e densidade p. Assim G_p tem como conjunto de vértices um conjunto fixo de cardinalidade n e cada aresta está independentemente presente com probabilidade p. Babai, Simonovits, e Spencer [9] provaram que se tomamos um subgrafo livre de K^3 de tamanho máximo em $G_{1/2}$, então quase certamente obteremos um subgrafo bipartido. Este resultado é também válido para G_p desde de que p seja suficientemente próximo de $1/2$. Entretanto, o caso em que p depende de n e $p = p(n) \to 0$ conforme $n \to \infty$ está aberto. Sejam G e H dois grafos dados. Ponha

$$\mathrm{ex}(G, H) = \max\{e(J)\colon H \not\subset J \subset G\}.$$

Desta forma, $\mathrm{ex}(G, H)$ é o tamanho máximo de um subgrafo de G livre de H.

Problema 4. *Seja H um grafo. Investigue a variável aleatória $Z_H(G_p) = \mathrm{ex}(G_p, H)$ para $p = p(n) \to 0$ conforme $n \to \infty$.*

Existem hoje alguns resultados substanciais motivados pelo Problema 4, embora eles estejam longe de resolver este problema em toda sua generalidade. O Problem 4, no caso em que H é um circuito, foi resolvido satisfatoriamente por Haxell, Kohayakawa, e Łuczak [33, 34] (cf. também Haxell e Kohayakawa [29]) e Kohayakawa, Kreuter, e Steger [40]. O caso em que H é o grafo completo de ordem quatro foi recentemente resolvido em Kohayakawa, Łuczak, e Rödl [43].

Lembremos que Rödl e Ruciński [61, 62] recentemente conseguiram estabelecer a função limiar para a propriedade $G_p \to (H)_r$ para todo grafo H

e todo inteiro fixo $r \geq 2$. Aqui, como de usual, escrevemos $G \to (H)_r$ se em qualquer r-aresta-coloração de G podemos sempre encontrar uma cópia monocromática de H. Assim, é plausível que uma solução satisfatória para o Problema 4 esteja já ao nosso alcance.

Concluímos mencionando um resultado relacionado. Da mesma forma que os métodos desenvolvidos por Rödl e Ruciński [62] puderam ser usados no estudo de propriedades de van der Waerden de conjuntos aleatórios de inteiros, alguns dos métodos usados no estudo do Problema 4, junto com outros métodos, foram usados por Kohayakawa, Łuczak, e Rödl [44] para investigar conjuntos aleatórios de inteiros com a propriedade de Szemerédi com respeito a progressões aritméticas de ordem três.

5.4. *Conjuntos estáveis em grafos livres de K^s e $R(s,t)$.* Seja G um grafo de ordem n que não contém um subgrafo completo de ordem s. Estamos interessados aqui no número de independência $\alpha(G)$ de G, a cardinalidade máxima de um conjunto independente em G.

Ajtai, Komlós, e Szemerédi [1] mostraram que todo grafo sem triângulos ($s = 3$) tem $\alpha(G) \geq cn(\log d)/d$, onde c é uma constante e d é o grau médio de G. Erdős pergunta se uma afirmativa similar pode ser feita para $s = 4$ e, de fato, para todo $s \geq 4$ fixo, mas este problema permanece aberto. Observamos que Ajtai, Komlós, Pintz, Spencer, e Szemerédi [2] têm um resultado relacionado (veja §5.2 acima), a saber, um resultado que afirma que todo hipergrafo k-uniforme H de cintura ≥ 5 tem $\alpha(H) \geq c_k n((\log d)/d)^{1/(k-1)}$, onde d é, novamente, o grau médio de H.

As demonstrações de ambos os resultados acima empregam uma técnica que é, em essência, uma técnica de construção aleatória dirigida. Esta técnica foi grandemente refinada por Rödl [59], Frankl e Rödl [21], Pippenger e Spencer [50], e Kahn [36, 37] para investigar empacotamentos e coberturas em hipergrafos e, recentemente, Grable [25] usou uma extensão de tais técnicas para melhorar alguns destes resultados. Suspeitamos que estes melhoramentos, entre outras técnicas desenvolvidas recentemente, permitirão resolver o problema de Erdős mencionado acima, pelo menos em parte.

Uma característica muito atraente deste problema é que ele tem conseqüências reais no estudo de números de Ramsey não-diagonais, já que, se resolvido satisfatoriamente, ele possibilitará a obtenção de bons limites superiores. Defina $R(s,t)$ como o menor inteiro n tal que todo grafo com n vértices contém ou um grafo completo com s vértices ou um conjunto independente com t vértices. O resultado de Ajtai, Komlós, e Szemerédi implica que $R(3,t) \leq ct^2/\log t$. Um argumento de indução fornece que $R(s,t) \leq c_s t^{s-1}/(\log t)^{s-2}$, mas um limite superior obtido como conseqüência da solução do problema de Erdős tem maiores chances de ser justo. Para comparação, mencionamos que o melhor limite inferior para $R(s,t)$ conhecido atualmente é basicamente $t^{(s-1-o(1))/2}$ para todo s fixo e $t \to \infty$, e parece ser improvável que este limite possa ser melhorado substancialmente, mesmo através de métodos poderosos como aqueles desenvolvidos por Kim [39] para o caso $s = 3$.

5.5. *Enumeração de grafos com subgrafos proibidos.* Seja dado um grafo H. Denotamos por $f(H,n,m)$ o número de grafos livres de H de ordem n e tamanho m, e pomos $g(H,n) = \sum_m f(H,n,m)$. Analogamente, denotamos por $f_{\text{ind}}(H,n,m)$ o número de grafos de ordem n e tamanho m livres de cópias *induzidas* de H, e pomos $g_{\text{ind}}(H,n) = \sum_m g_{\text{ind}}(H,n,m)$. O estudo das funções f, g, f_{ind}, g_{ind} é de natureza fundamental. Para g e g_{ind}, referimos o leitor aos trabalhos [3, 16, 51, 52, 53] e as referências lá citadas.

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade hereditária qualquer de grafos, *i.e.* uma propriedade que é fechada com respeito à operação de se tomar subgrafos induzidos. Alekseev [3] e, independentemente, Bollobás e Thomason [16] provaram que o número $f_{\mathcal{P}}(n)$ de grafos de ordem n com a propriedade $\mathcal{P}$ satisfaz $\log_2 f_{\mathcal{P}}(n) = (1-1/r+o(1))\binom{n}{2}$ conforme $n \to \infty$, onde $r = r(\mathcal{P}) \geq 1$ é um inteiro que pode ser descrito explicitamente em termos de $\mathcal{P}$. Um problema desafiador é o de generalizar este resultado para hipergrafos.

Problema 5. *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de hipergrafos r-uniformes ($r \geq 3$). Descreva os possíveis valores de* $\lim \binom{n}{r}^{-1} \log_2 f_{\mathcal{P}}(n)$, *onde $f_{\mathcal{P}}(n)$ é o número de hipergrafos r-uniformes de ordem n satisfazendo $\mathcal{P}$.*

Nos problemas acima, seria de grande interesse especificar não apenas a ordem mas também o *tamanho* dos grafos e hipergrafos que estamos enumerando. Os problemas que obtemos com estas condições extras são, entretanto, muito mais difíceis de serem tratados. De fato, o que se conhece atualmente sobre o comportamento das funções f e f_{ind} é muito mais fraco do que o que sabemos sobre g e g_{ind}. Um resultado recente de Prömel e Steger [54] estabelece o comportamento assintótico fino da função $f(K^3,n,m)$ para uma ampla gama da função $m = m(n)$, mas determinar o comportamento desta função para todo $m = m(n)$ parece ainda elusivo.

Observamos que a investigação da função $f(H,n,m)$ para uma gama ampla de $m = m(n)$ será provavelmente útil no estudo da variável aleatória $Z_H(G_p) = \mathrm{ex}(G_p,H)$ discutida na Seção 5.3 (cf. Problema 4). Encerramos este parágrafo com um problema específico sobre a função f. Considere a probabilidade $P_{\ell,n,m}$ de um grafo de ordem n e tamanho m escolhido uniformemente ao acaso ser livre de $C^{2\ell}$. Assim $P_{\ell,n,m} = f(C^{2\ell}, n, m)\binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}$.

Problema 6. *É verdade que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} \log P_{\ell,n,m} = 0$$

para toda função $m = m(n) = \omega n^{1+1/(2\ell-1)}$*, onde* $\omega = \omega(n) \to \infty$ *conforme* $n \to \infty$ *e* $\omega = o(n^{1/2(\ell-1)(2\ell-1)})$*?*

Para o caso $\ell = 2$, veja Füredi [23]. Mais genericamente, em Kohayakawa, Kreuter, e Steger [40], uma variante do Problema 6 é estudada para ℓ genérico, e, como uma conseqüência de um resultado de enumeração assintótica de [40], o Problema 4 é resolvido para quando $H = C^{2\ell}$ e $p = p(n)$ pertence a um intervalo polinomial suficientemente pequeno em torno do limiar $n^{-1+1/(2\ell-1)}$. Este resultado implica em particular que existem grafos G extremamente esparsos com a propriedade de que qualquer fração positiva de suas arestas geram um circuito de comprimento par pré-determinado.

5.6. *'Spanners' em grafos.* Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de ordem n com pesos positivos nas arestas. Um subgrafo gerador $G' = (V, E')$ de G é um *t-spanner* de G se para todo par de vértices u, $v \in V$ o peso do caminho mais leve entre u e v em G' é no máximo t vezes esta quantidade no grafo G. Consideramos aqui o problema de construir *spanners* esparsos. O quão esparso é um *spanner* pode ser medido através de duas quantidades, o seu tamanho, e o seu peso $\mathrm{wt}(G')$, definido, naturalmente, como a soma dos pesos das arestas de G'.

Seja MST uma árvore geradora de peso mínimo em G. Soares (veja [64]) provou que para qualquer grafo G como acima, e quaisquer $t > 1$ e $\varepsilon > 0$, um t-spanner de G com peso $O\{n^{(2+\varepsilon)/(t-1)}\mathrm{wt}(MST)\}$ e $O(n^{1+2/(t-1)})$ arestas pode ser construído em tempo polinomial.

Por outro lado, o seguinte limite inferior foi provado em [6]: para todo par de inteiros $t \geq 1$ e $n \geq 3$, existe um grafo G de ordem n com peso nas arestas tal que todo *t-spanner* G' de G tem peso $(1/8)n^{4/3(t+2)}\mathrm{wt}(MST)$ e pelo menos $(1/8)n^{1+4/3(t+2)}$ arestas.

Problema 7. *Encontre um esquema de aproximação polinomial para o problema dos spanners, ou, em outras palavras, uma família de algoritmos polinomiais, uma para cada* $\varepsilon > 0$*, tal que cada algoritmo constrói um t-spanner* G' *de* G *para todo grafo* G *com peso nas arestas dado, satisfazendo* *a propriedade de que G' tem peso não maior do que $1+\varepsilon$ vezes o peso do t-spanner mínimo de G.*

Caso encontremos um esquema polinomial como acima, teremos um resultado ótimo: Peleg e Schäffer [49] provaram que é NP-difícil se obter uma solução ótima para o problema dos *spanners*.

Problema 8. *Alternativamente, prove que o problema de se encontrar um spanner de peso mínimo é* MAX SNP*-difícil.*

Em outra palavras, o problema acima pede para provar que esquemas aproximação como no Problema 7 não existem, a menos que P = NP (veja [7] e §5.7 abaixo).

Problema 9. *Encontre um algoritmo polinomial $\mathcal{A}$ com garantia de desempenho para contruir t-spanners, i.e., para cada grafo G com peso nas arestas e $t \geq 1$, o algoritmo $\mathcal{A}$ deve construir um t-spanner G' de G tal que o peso de G' é no máximo $c\delta_{\mathrm{opt}}$ onde c é uma constante absoluta e δ_{opt} é o peso mínimo possível para um t-spanner de G.*

5.7. *Sistemas de demonstrações em teoria da computação.* Vários dos resultados recentes importantes dentro da teoria de complexidade tratam de 'sistemas de provas' ou 'sistemas de demonstrações' como entendido na ciência da computação. Exemplos importantes são *sistemas interativos de provas*, *sistemas de provas com conhecimento zero*, e *provas verificáveis probabilisticamente*, ou *provas transparentes* ou *holográficas*. Resultados nesta área têm conseqüências profundas em problemas de aproximação em otimização combinatória. De fato, surpreendentemente, estes resultados mostraram ser ferramentas poderosas para se provar limites inferiores para o desempenho de algoritmos polinomiais de aproximação. Referimos o leitor aos trabalhos de Babai [8], Goldreich [24], e Hougardy, Prömel, e Steger [35] para uma introdução excelente a esta linha de pesquisa.

Para os proponentes deste projeto, que entraram em contato com esta área relativamente recentemente, será bastante importante colaborar com o grupo do Professor Prömel neste assunto dentro deste projeto. O nosso objetivo é o de adquirir um conhecimento suficientemente amplo nesta área, possibilitando assim fazermos pesquisa sobre este assunto.

Em julho de 1995, estaremos dando um curso sobre provas probabilisticamente verificáveis e a impossiblidade de aproximações para certos problemas de otimização no *20º Colóquio Brasileiro de Matemática* no IMPA. Estamos para tanto preparando um texto sobre este assunto [45]

§6. Pessoal Envolvido

Participantes brasileiros

(*i*) Dr Yoshiharu Kohayakawa (coordenador local)
(*ii*) Dr José Soares

Participantes alemães

(*i*) Professor Dr Hans Jürgen Prömel (coordenador local)
(*ii*) Dr David Grable
(*iii*) Dr Angelika Steger
(*iv*) Dipl. Math. Bernd Kreuter
(*v*) Dipl. Math. Anusch Taraz*

Observação. Seguem anexo os currículos dos 7 participantes.

§7. Cronograma de Execução

Prevemos a duração de 3 anos para este projeto. Durante este período, planejamos uma visita por semestre letivo, alternando a direção. Temos assim um total tentativo de 6 visitas, 3 para cada parceiro, cada um de 1 a 3 meses de duração.

§8. Processos de Acompanhamento

Consideraremos este projeto bem sucedido se vários trabalhos conjuntos elaborados a partir da nossa colaboração forem publicados em periódicos especializados de alta qualidade.

O processo de acompanhamento terá a regularidade de elaboração de relatórios técnicos e a submissão destes trabalhos para publicação como critérios objetivos de avaliação do andamento do projeto. Levaremos também em conta a aceitação de nossos trabalhos em conferências internacionais especializadas.

Também iremos nos preocupar com a divulgação de nosso trabalho junto às comunidades locais, incentivando assim a pesquisa nas áreas contempladas neste projeto e também enriquecendo o nosso programa de mestrado e doutorado nestas áreas.

* Mestrado com término previsto para maio de 1995

Referências

[1] Ajtai, M., Komlós, J., Szemerédi, E., A note on Ramsey numbers, *J. Combinatorial Theory*, Series A **29** (1980), 354–360.

[2] Ajtai, M., Komlós, J., Pintz, J., Spencer, J., Szemerédi, E., Extremal uncrowded hypergraphs, *J. Combinatorial Theory*, Series A **32** (1982), 321–335.

[3] Alekseev, V.E., On the entropy values of hereditary classes of graphs, *Discrete Math. Appl.* **3** (1993), 191–199.

[4] Alon, N., Lefmann, H., Rödl, V., On an anti-Ramsey type result, in *Sets, Graphs and Numbers*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 60, Budapest 1991, pp. 9–22.

[5] Alon, N., Spencer, J., *The Probabilistic Method*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1992, $xiii + 254$pp.

[6] Althöfer, I., Das, G., Dobkin, D., Joseph, D., Soares, J., On sparse spanners of weighted graphs, *Discrete Comp. Geom.*, to appear.

[7] Arora, S., Lund, C., Motwani, R., Sudan, M., Szegedy, M., Proof verification and hardness of approximation problems, in *Proc. 33rd Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, 1992, pp. 14–23.

[8] Babai, L., Transparent proofs and limits to approximation, *Proc. of the First European Congress of Mathematics*, Birkhäuser.

[9] Babai, L., Simonovits, M., Spencer, J., Extremal subgraphs of random graphs, *J. Graph Theory* **14** (1990), 599–622.

[10] Beck, J., On size Ramsey number of paths, trees, and circuits I, *J. Graph Theory* **7** (1983), 115–129.

[11] Beck, J., On size Ramsey number of paths, trees, and circuits II, in *Mathematics of Ramsey Theory* (Nešetřil, J., Rödl, V., eds), Algorithms and Combinatorics 5, Springer-Verlag, Berlin 1990, pp. 34–45.

[12] Bollobás, B., *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London 1978, $xx + 488$pp.

[13] Bollobás, B., *Random Graphs*, Academic Press, London, 1985, $xvi + 447$pp.

[14] Bollobás, B., *Probabilistic Combinatorics and its Applications*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 44, American Mathematical Society, Providence 1991.

[15] Bollobás, B., Personal communication, November 1992.

[16] Bollobás, B., Thomason, A.G., Hereditary and monotone properties of graphs, to appear.

[17] Brightwell, G.R., Kohayakawa, Y., Ramsey properties of orientations of graphs, *Random Structures and Algorithms* **4** (1993), 413–428.

[18] Deuber, W., A generalization of Ramsey's theorem, in *Infinite and Finite Sets* (Hajnal, A., Rado, R., Sós, V.T., eds), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland, Amsterdam 1975, pp. 323–332.

[19] Erdős, P., Hajnal, A., Pósa, L., Strong embeddings of graphs into colored graphs, in *Infinite and Finite Sets*, (Hajnal, A., Rado, R., Sós, V.T., eds), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland, Amsterdam 1975, pp. 585–595.

[20] Erdős, P., Szekeres, G., A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463–470.

[21] Frankl, P., Rödl, V., Near perfect coverings in graphs and hypergraphs, *Europ. J. Combinatorics* **6** (1985), 317–326.

[22] Frieze, A.M., Reed, B., Polychromatic Hamilton cycles, *Discrete Math.* **118** (1993), 69–74.

[23] Füredi, Z., Random Ramsey graphs for the four-cycle, *Discrete Math.* **126** (1994), 407–410.

[24] Goldreich, O., Probabilistic proof systems (a survey), in *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, Report Nr. TR94–008, 1994.

[25] Grable, D., More-than-nearly-perfect packings and partial designs, preprint, September 1994.

[26] Graham, R.L., Rödl, V., Numbers in Ramsey theory, in *Surveys in Combinatorics 1987* (Whitehead, C., ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series 123, Cambridge University Press, Cambridge 1987, pp. 112–153.

[27] Graham, R.L., Rothschild, B.L., Spencer, J., *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, New York 1980.

[28] Hahn, G., Thomassen, C., Path and cycle sub-Ramsey numbers and an edge-colouring conjecture, *Discrete Math.* **62** (1986), 29–33.

[29] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Ramsey and Turán type results for cycles in pseudo-random graphs, manuscript, 1992.

[30] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., On an anti-Ramsey property of Ramanujan graphs, *Random Structures and Algorithms*, to appear.

[31] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., The size-Ramsey number of trees, *Israel J. Math.* **89** (1995), 261–274.

[32] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., The induced size-Ramsey number of cycles, *Combinatorics, Probability, and Computing*, to appear.

[33] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles, *Combinatorica*, to appear.

[34] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles, *J. Combinatorial Theory*, Series B, to appear.

[35] Hougardy, S., Prömel, H.J., Steger, A., Probabilistically checkable proofs and their consequences for approximation algorithms, *Discrete Math.* **136** (1994), 175–223.

[36] Kahn, J., Asymptotics of hypergraph matching, covering and coloring problems, in *Proc. of the International Congress of Mathematicians, Zürich 1994*, to appear.

[37] Kahn, J., On some hypergraph problems of Paul Erdős and the asymptotics of matchings, covers, and colorings, preprint 1994.

[38] Ke, X., The size Ramsey number of trees with bounded degree, *Random Structures and Algorithms* **4** (1993), 85–97.

[39] Kim, J.H., The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$, preprint, December 1994.

[40] Kohayakawa, Y., Kreuter, B., Steger, A., An extremal problem for random graphs and the number of graphs with large even-girth, *Combinatorica*, submitted, 1995.

[41] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Sparse anti-Ramsey graphs, *J. Combinatorial Theory*, Series B **63** (1995), 146–152.

[42] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Rödl, V., Ramsey-type results for oriented trees, *J. Graph Theory*, to appear.

[43] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Rödl, V., On K^4-free subgraphs of random graphs, in preparation, 1995.

[44] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Rödl, V., Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set, in preparation, 1995.
[45] Kohayakawa, Y., Soares, J., *Provas Transparentes e a Impossiblidade de Aproximações*, texto para o 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, julho de 1995.
[46] Lubotzky, A., Phillips, R., Sarnak, P., Ramanujan graphs, *Combinatorica* **8** (1988), 261–277.
[47] Łuczak, T., Rödl, V., On induced Ramsey numbers for graphs with bounded maximum degree, submitted, 1995.
[48] Nešetřil, J., Rödl, V., *Mathematics of Ramsey Theory*, Algorithms and Combinatorics 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990.
[49] Peleg, D., Schäffer, A., Graph Spanners, *J. Graph Theory* **13** (1989), 99–116.
[50] Pippenger, N., Spencer, J., Asymptotic behaviour of the chromatic index for hypergraphs, *J. Combinatorial Theory*, Series A **51** (1989), 24–42.
[51] Prömel, H.J., Steger, A., The asymptotic number of graphs not containing a fixed color-critical subgraph, *Combinatorica* **12** (1992), 463–473.
[52] Prömel, H.J., Steger, A., Excluding induced subgraphs: quadrilaterals, *Random Structures and Algorithms* **2** (1991), 55–71.
[53] Prömel, H.J., Steger, A., Excluding induced subgraphs III: a general asymptotic, *Random Structures and Algorithms* **3** (1992), 19–31.
[54] Prömel, H.J., Steger, A., On the asymptotic structure of sparse triangle free graphs, *J. Graph Theory*, to appear.
[55] Prömel, H.J., Voigt, B., Canonizing Ramsey theorems for finite graphs and hypergraphs, *Discrete Math.* **54** (1985), 49–59.
[56] Prömel, H.J., Voigt, B., *Aspects of Ramsey Theory*, to appear in the series "Algorithms and Combinatorics", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
[57] Ramsey, F.P., On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1930), 264–286.
[58] Rödl, V., The dimension of a graph and generalized Ramsey theorems, Thesis, Charles University, Praha, 1973.
[59] Rödl, V., On a packing and covering problem, *Europ. J. Combinatorics* **5** (1985), 69–78.
[60] Rödl, V., Tuza, Zs., Rainbow subgraphs in properly edge-coloured graphs, *Random Structures and Algorithms* **3** (1992), 175–182.
[61] Rödl, V., Ruciński, A., Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties, in *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty* (Volume 1), Keszthely (Hungary), Bolyai Soc. Math. Studies, 1993, pp. 317-346.
[62] Rödl, V., Ruciński, A., Threshold functions for Ramsey properties, *J. Amer. Math. Soc.*, to appear.
[63] Simonovits, M., Extremal graph theory, in *Selected Topics in Graph Theory 2* (Beineke, L.W., Wilson, R.J., eds), Academic Press, London 1983, pp. 161–200.
[64] Soares, J., *Graph spanners*, Ph.D. Thesis, University of Chicago, Technical Report CS 92-14, 1992.
[65] Steger, A., *Asymptotic Properties of H-free Graphs*, Habilitationsschrift, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Universität Bonn, November 1993.