6 Projektbeschreibung

6.1 Allgemeine Zielsetzung und Begrndung

Im Rahmen des beantragten Projektes zwischen der Humboldt-Universität zu Berlin und der Universität São Paulo soll die Zusammenarbeit zwischen der Arbeitsgruppe von Professor Prömel und den Arbeitsgruppen von Professor Kohayakawa und Professor Soares fortgesetzt und intensiviert werden. Die brasilianische Gruppe hat in den vergangenen Jahren eine große Kompetenz auf dem Gebiet der zufälligen und extremalen Graphen aufgebaut, das sich inhaltlich und methodisch in hervorragender Weise mit den Interessengebieten der Arbeitsgruppe in Berlin (extremale Graphentheorie und Ramsey Theorie, zufällige Graphen und Hypergraphen, asymptotische Graphentheorie) ergänzt. Erste Ergebnisse dieser fruchtbaren Zusammenarbeit finden sich in einer Arbeit von Kohayakawa, Kreuter und Steger [5], in der Resultate dargestellt werden, die während eines Forschungsaufenthaltes des ersten Autors bei der Arbeitsgruppe von Professor Prömel im Juli 1994 in Bonn (unterstützt durch ein Austauschprogramm zwischen dem DAAD und der Universität São Paulo) erzielt worden sind. Zu nennen ist hier auch die gerade fertiggestellte Diplomarbeit von Taraz [25], in der eine gemeinsame Verallgemeinerung eines Satzes von Steger [23] und eines Satzes von Kohayakawa [47] bewiesen wird.

Schwerpunkte der beabsichtigten Zusammenarbeit sollen in den schnell wachsenden Bereichen der extremalen Kombinatorik und der probabilistischen Methoden liegen. Insbesondere sollen hierbei Anwendungen von auf Beherrschung des Zufalls beruhender Methoden auf kombinatorische Fragen untersucht werden.

6.2 Wissenschaftliche Zielsetzung und Arbeitsprogramm

In den folgenden Unterabschnitten werden wir für einige Fragen einen kurzen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung geben und dabei Probleme ansprechen, die wir im Rahmen der deutsch-brasilianischen Kooperation untersuchen wollen.

6.2.1 Extremale Probleme für zufällige Graphen von der Form des Satzes von Turán

Seien G und H zwei Graphen. Dann heißt G H-frei, wenn G keinen (schwachen) Subgraphen enthält, der isomorph zu H ist. Mit $G_p = G_{n,p}$ sei der zufällige Graph auf n Knoten bezeichnet, der alle Kanten unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p enthält. Babai, Simonovits und Spencer [30] zeigten, daß ein (kanten-)maximaler K^3-freier Untergraph von $G_{1/2}$ fast sicher genauso viele Kanten enthält wie ein (kanten-)maximaler bipartiter Untergraph von $G_{1/2}$, oder, anders ausgedrückt, daß der maximale K^3-freie Untergraph fast sicher bipartit ist. Das gleiche Resultat gilt auch für G_p, falls p sich nur um eine kleine Konstante von $1/2$ unterscheidet. Der Fall, in dem p von n abhängt und $p = p(n) \to 0$ für $n \to \infty$ konnte in [30] noch nicht gelst werden. Zur Formalisierung dieser Fragestellung definieren wir

$$ex(G, H) = \max\{e(J) \ : \ H \not\subset J \subset G\}.$$

Dann bezeichnet also $ex(G, H)$ die maximale Anzahl Kanten eines H-freien Untergraphen von G.

Problem 1 *Sei H ein Graph. Untersuche die Zufallsvariable $Z_H(G_p) = ex(G_p, H)$ für $p = p(n) \to 0$ und $n \to \infty$.*

In letzter Zeit gab es einige Resultate in Richtung der Fragestellung von Problem 1, wenngleich man noch weit davon entfernt ist, dieses Problem allgemein lösen zu können. Für den Fall, daß H ein ungerader Kreis ist, wurde Problem 1 zufriedenstellend von Haxell, Kohayakawa und Luczak [44] (siehe auch Haxell und Kohayakawa [40]) gelöst. Für gerade Kreise konnten kürzlich Kohayakawa, Kreuter und Steger [5] ein Ergebnis von Haxell, Kohayakawa und Luczak [45] signifikant verschärfen. Der Fall, in dem H der vollständige Graph auf vier Knoten ist, wurde in einer Arbeit von Kohayakawa, Luczak und Rödl [49] abschließend behandelt.

In diesem Zusammenhang verweisen wir darauf, daß Rödl und Ruciński [55, 56] vor kurzem die Schwellenwertfunktion für die Eigenschaft $G_p \to (H)_r$ für einen beliebigen Graphen H und eine ganze Zahl $r \geq 2$ bestimmen konnten. Dabei bedeutet $G \to (H)_r$, daß es in jeder Kantenfärbung von G mit r Farben eine einfarbige Kopie von H gibt. Das Ergebnis von Rödl und Ruciński läßt hoffen, daß sich mit den bisher bekannten Methoden eine zufriedenstellende Lösung von Problem 1 finden läßt.

6.2.2 Asymptotische Graphentheorie

Sei H ein Graph. Dann bezeichne $f(H,n,m)$ die Anzahl der Graphen mit n Knoten und m Kanten, die H nicht als schwachen Untergraphen enthalten. Sei ferner $g(H,n) = \sum_m f(H,n,m)$. Analog bezeichne $f_{ind}(H,n,m)$ die Anzahl der Graphen mit n Knoten und m Kanten, die H nicht als *induzierten* Untergraphen enthalten, und es sei $g_{ind}(H,n) = \sum_m f_{ind}(H,n,m)$. Das Studium der Funktionen f, g, f_{ind} und g_{ind} ist von grundlegender Bedeutung und wird im allgemeinen Asymptotische Graphentheorie genannt. Für Aussagen über die Funktionen g and g_{ind} verweisen wir auf [26, 34, 8, 9, 11] und die darin enthaltenen Referenzen.

Sei nun $\mathcal{P}$ eine erbliche Eigenschaft von Graphen, das heißt eine Eigenschaft, die abgeschlossen unter der Bildung von induzierten Untergraphen ist. In Erweiterung einer Aussage von Prömel, Steger [11] konnten Alekseev [26] und unabhängig davon Bollobás und Thomason [34] zeigten, daß $g_{\mathcal{P}}(n)$, die Anzahl der Graphen, die die Eigenschaft $\mathcal{P}$ haben, sich durch $\log_2 g_{\mathcal{P}}(n) = (1 - 1/r + o(1))\binom{n}{2}$ für $n \to \infty$ beschreiben läßt, wobei $r = r(\mathcal{P}) \geq 1$ ein ganzzahliger Parameter ist, der sich explizit in Abhängigkeit von $\mathcal{P}$ darstellen läßt. Ein interessantes offenes Problem ist das der Frage nach der Existenz eines Analogons dieses Resultats für Hypergraphen.

Problem 2 *Sei $\mathcal{P}$ eine erbliche Eigenschaft von r-uniformen Hypergraphen ($r \geq 3$). Definiere $g_{\mathcal{P}}(n)$ als die Anzahl der r-uniformen Hypergraphen auf n Knoten, die die Eigenschaft $\mathcal{P}$ haben. Bestimme* $\lim_{n\to\infty} \log_2 g_{\mathcal{P}}(n)\binom{n}{r}^{-1}$.

Es wäre interessant, die obengenannten Probleme für eine feste Knoten- *und* Kantenzahl der Graphen G zu betrachten. Die Fragen, die dadurch entstehen, wenn wir auch noch diese zusätzliche Bedingung voraussetzen, sind jedoch deutlich schwieriger. So ist der aktuelle Stand des Wissens über die Funktionen f und f_{ind} viel weniger fortgeschritten als der über die Funktionen g und g_{ind}. Vor kurzem konnten Prömel und Steger [17] Asymptotiken für die Funktion $f(K^3,n,m)$ für einen großen Wertebereich für $m = m(n)$ bestimmen. Die Bestimmung dieser Funktionen für alle möglichen Werte von m scheint jedoch neue Methoden zu erfordern.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist auch, daß die Untersuchung von $f(H,n,m)$ für einen großen Bereich von $m = m(n)$ sehr hilfreich zum Studium der Zufallsvariable $Z_H(G_p) = ex(G_p, H)$, die in Abschnitt 6.2.1 eingeführt wurde, sein kann. Bezeichne $P_{\ell,n,m}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig gewählter Graph H auf n Knoten und mit m Kanten, $C^{2\ell}$-frei ist. Dann gilt also .

Problem 3 *Gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\log P_{\ell,n,m}=0$$

für eine Funktion $m=m(n)=\omega n^{1+1/(2\ell-1)}$, *wobei* $\omega=\omega(n)\to\infty$ *für* $n\to\infty$ *und* $\omega=o(n^{1/2(\ell-1)(2\ell-1)})$ *?*

Für den Fall $\ell=2$ verweisen wir auf die Arbeit von Füredi [38]. Kohayakawa, Kreuter und Steger [5] haben eine Variante von Problem 3 für allgemeines ℓ studiert, und als Folgerung dieses asymptotischen Resultates konnte in [5] Problem 1 für den Fall $H=C^{2\ell}$ gelöst werden. Dieses Resultat impliziert insbesondere, daß es sehr dünne Graphen G gibt, die die Eigenschaft haben, daß jede Teilmenge der Kantenmenge von G, sobald sie nur eine gewisse (zum Beispiel konstante) Dichte hat, einen Kreis der Länge ℓ enthält.

6.2.3 Unabhängige Mengen in K^s-freien Graphen und die Ramseyzahl $R(s,t)$

Sei G ein Graph auf n Knoten, der keinen vollständigen Graphen der Ordnung s enthält. Im folgenden werden wir die Frage nach der Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ von G, das heißt nach der Größe der kardinalitätsmaximalen stabilen Menge von G, diskutieren.

Ajtai, Komlós und Szemerédi [28] zeigten, daß für jeden K^3-freien Graphen G $\alpha(G)\geq cn(\log d)/d$ gilt, wobei c eine Konstante ist und d den Durchschnittsgrad von G bezeichnet. Erdős stellte die (bisher unbeantwortete) Frage, ob für den K^4 oder sogar für beliebige K^s eine ähnliche Aussage gemacht werden kann. In diesem Zusammenhang ist ein verwandtes Resultat von Ajtai, Komlós, Pintz, Spencer und Szemerédi [27] zu erwähnen, die zeigen konnten, daß für jeden k-uniformen Hypergraphen H, der keine Kreise der Länge 2, 3, und 4 enthält, gilt, wobei d wieder den Durchschnittsgrad bezeichnet.

Beide Resultate wurden durch das Studium eines sogenannten „nibble"-Prozesses erzielt. Die Idee des „nibble"-Prozesses wurde von Rödl [52], Frankl und Rödl [37] eingeführt sowie von Pippenger und Spencer [50] weiterentwickelt, um Matchings in Hypergraphen zu studieren. Vor kurzem verwendete Grable [3] einen erweiterten „nibble"-Prozess, um diese Resultate weiter zu verbessern. Wir haben die Hoffnung, daß diese Verbesserungen, sowie einige andere vor kurzem entwickelten Techniken, zumindest zu einer teilweisen Antwort auf die Frage von Erdős führen werden.

Ein weiterer interessanter Aspekt dieses Problems ist, daß es zur Abschätzung der (asymmetrischen) Ramseyzahlen verwendet werden kann. Sei $R(s,t)$ die kleinste Zahl, so daß jeder Graph der Ordnung $R(s,t)$ entweder einen vollständigen Graphen auf s Knoten oder eine unabhängige Menge der Kardinalität t enthält. Das Resultat von Ajtai, Komlós und Szemerédi impliziert, daß $R(3,t)\leq ct^2/\log t$. Per Induktion folgt dann, daß $R(s,t)\leq c_s t^{s-1}/(\log t)^{s-2}$. Eine Antwort auf das Problem von Erdős würde hier aber wahrscheinlich eine wesentlich bessere Schranke ergeben. Die beste bekannte untere Schranke für $R(s,t)$ ist $t^{(s-1-o(1))/2}$. Sie kann aller Wahrscheinlichkeit nach selbst mit den ausgefeilten Techniken, die Kim [46] für den Fall $s=3$ angewandt hat, kaum verbessert werden.

6.2.4 Bestimmung von Parametern der Ramseytheorie

Seien G und H zwei Graphen. Dann bedeutet $G\to H$, daß es in jeder 2-Färbung der Kanten von G einen einfarbigen Subgraphen von G gibt, der zu H isomorph ist. Wenn zusätzlich gefordert wird, daß dieser Subgraph induziert sein soll, stellt man dies als $G\xrightarrow{\text{ind}}H$ dar. Unter Verwendung dieser

Terminologie zeigt der Satz von Ramsey, daß für jeden Graphen H gilt $G \rightarrow H$, sobald G nur ein hinreichend großer vollständiger Graph ist. Für induzierte Subgraphen besagt ein klassisches Resultat, das unabhängig von Deuber [35], Erdős, Hajnal und Pósa [36] sowie von Rödl [54] bewiesen wurde, daß es für jeden Graphen H einen Graphen G mit $G \xrightarrow{\text{ind}} H$ gibt. Wir konzentrieren uns hier auf die Bestimmung einiger Parameter, die im Zusammenhang mit den beiden Relationen $\rightarrow$ und $\xrightarrow{\text{ind}}$ stehen. Für den historischen Hintergrund und eine Übersicht über verwandte Fragenstellungen siehe Prömel, Voigt [19].

Für einen Graphen G bezeichnen wir mit $|G|$ die Anzahl der Knoten von G und mit $e(G)$ die Anzahl der Kanten von G. Für einen Graphen H sei $r(H)$ die kleinstmögliche Knotenzahl eines Graphen G mit $G \rightarrow H$ und $r_e(H)$ die kleinstmögliche Anzahl Kanten eines solchen Graphen; das heißt $r(H) = \min\{|G| \ : \ G \rightarrow H\}$ und $r_e(H) = \min\{e(G) \ : \ G \rightarrow H\}$. Wenn man die Relation $\rightarrow$ durch $\xrightarrow{\text{ind}}$ ersetzt, erhält man die Parameter $r^{ind}(H)$ und $r_e^{ind}(H)$. In vielen Problem der Ramseytheorie geht es um die Untersuchung dieser Parameter.

Als Antwort auf ein Problem von , bewies Beck [31] unter Benutzung von zufälligen Graphen, daß $r_e(P^\ell) = O(\ell)$, wobei P^ℓ den Pfad mit ℓ Knoten bezeichnet.

In [32] betrachtete Beck das Problem für beliebige Bäume, konnte es aber nicht abschließend lösen. Kürzlich konnten Haxell und Kohayakawa [42] eine etwas abgeschwächte Version von Becks in [42] aufgestellter Vermutung zeigen.

In einer Verallgemeinerung der obengenannten Resultate von Beck über Pfade bewiesen Bollobás and Burr [33], daß $r_e(C^\ell) = O(\ell)$, wobei C^ℓ den Kreis der Länge ℓ bezeichnet. Vor kurzem konnte dieses Ergebnis von Haxell, Kohayakawa und Luczak [43] weiter verallgemeinert werden, und sogar $r_e^{ind}(C^\ell) = O(\ell)$ gezeigt werden. Dieses letztgenannte Resultat beantwortet eine Frage von Graham and Rödl [39], die vermuteten, daß $r^{ind}(P^\ell) = O(\ell)$.

Das Problem der Bestimmung von $f(n) = \max\ r^{ind}(H)$, wobei das Maximum über alle Graphen H der Ordnung n gebildet wird, ist gleichfalls von großem Interesse. In der oben genannten Arbeit zeigten Graham und Rödl, daß $f(n) \leq 2^{2^{n^{1+o(1)}}}$, stellten aber gleichzeitig auch die Vermutung auf, daß es sogar eine Konstante C geben sollte, für die $f(n) \leq C^n$ gilt. Unter Verwendung seiner Methoden aus [54] konnte Rödl dies für bipartite Graphen auch beweisen. Wir hoffen, daß das Ramsey-theoretische Wissen der Berliner Arbeitsgruppe, gepaart mit den kürzlich von Kohayakawa und anderen enttwickelten Methoden, es ermöglicht, die Graham-Rödl Vermutung noch für andere Graphenklassen zeigen zu können.

6.2.5 Resultate der Form eines Anti-Ramseysatzes

Hier interessieren wir uns dafür, bezüglich Kantenfärbungen injektiv gefärbte Subgraphen in Graphen zu finden: das heißt Subgraphen, deren Kanten alle verschiedene Farben tragen.

Dünne Anti-Ramseygraphen. Seien G und H Graphen. Dann schreiben wir $G \xrightarrow{\text{mc}} H$, wenn man in jeder *zulässigen* Kantenfärbung von G einen zu H isomorphen, injektiv gefärbte Subgraphen von G finden kann. Sei $\hat{g}(H) = \inf\{g(G) \ : \ G \xrightarrow{\text{mc}} H\}$, wobei $g(G)$ die Taillenweite, das heißt die Länge eines kürzesten Kreises in G, bezeichnet. Es läßt sich leicht beweisen, daß für jeden Graphen H $\hat{g}(H) < \infty$ gilt. Andererseits fragte Spencer, ob $\hat{g}(C^\ell) \rightarrow \infty$ falls $\ell \rightarrow \infty$. Rödl und Tuza [53] beantworteten diese Frage positiv (siehe auch Haxell und Kohayakawa [41]), und formulierten auch die folgende sehr interessante Vermutung.

Vermutung *Für jeden Graphen H gilt $\hat{g}(H) = g(H)$.*

Diese Vermutung wurde für den Fall, daß H ein Kreis C^ℓ (mit $\ell \geq 3$) ist, von Kohayakawa and Luczak [48] bewiesen. Die in [48] angewandte Methode ist nicht konstruktiv und es ist nicht klar, ob sie zur Beantwortung der allgemeinen Frage von Rödl und Tuza verwendet werden kann. Andererseits könnten die Methoden von Prömel and Voigt [51], die explizite Konstruktionen beinhalten, in dieser Frage zum Ziel führen.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß Alon, Lefmann und Rödl [29] ein Resultat von der Form eines Anti-Ramseysatzes für Hypergraphen zeigen konnten, wobei sie die weitreichenden Ergebnisse von Ajtai *at al.* [27] verwenden konnten. Die in [29] entwickelten Methoden sollten auch zur Lösung anderer Probleme hilfreich sein.

6.3 Teilnehmende Wissenschaftler und Nachwuchsförderung

Prof. Dr. Hans Jürgen Prömel (C4)
Priv.-Doz. Dr. Angelika Steger (z. Z. C4-Vertretung an der Universität Kiel)
Dr. David A. Grable (BAT IIa)
Dipl. math. Bernd Kreuter (BAT IIa)
Anusch Taraz (BAT IIa/2 ab Juni 1995)

Herr Taraz hat gerade seine Diplomarbeit über Szemerdi's Regularity Lemma abgeschlossen, in der er eine gemeinsame Verallgemeinerung eines Satzes von Steger und eines Satzes von Kohayakawa beweist. Er beabsichtigt, im Umfeld dieses Projektes zu promovieren. Eine Zusammenarbeit mit der brasilianischen Arbeitsgruppe wird dabei für ihn von großem Nutzen sein. Herr Kreuter arbeitet im Rahmen seines Promotionsvorhabens an Fragen, die im vorliegenden Antrag bei der wissenschaftlichen Zielstellung und den Punkten 6.2.1 und 6.2.2 angeführt sind. Hier besteht derzeit bereits ein intensiver Austausch mit Professor Kohayakawa, dem bereits eine gemeinsame Publikation entsprungen ist. Eine Intensivierung dieser Kontakte sowie die Möglichkeit wechselseitiger Forschungsaufenthalte wären hier sehr stimulierend und würden seine Promotion mit Sicherheit positiv beeinflussen. Dr. Grable arbeitet derzeit an seiner Habilitationsschrift und untersucht insbesondere Fragen, die im Zusammenhang mit den unter 6.2.3 aufgeführten Problemen stehen. Ein wissenschaftlicher Austausch mit der brasilianischen Arbeitsgruppe, die eine große Kompetenz auf diesem Gebiet besitzt, würde sein Fortkommen mit Sicherheit unterstützen.

Ausgewählte Referenzen der Berliner Arbeitsgruppe der letzten 5 Jahre

[1] Grable, D., Phelps, K.T., Rödl, V., The minimum independence number for designs, erscheint in *Combinatorica.*

[2] Grable, D., The diameter of a random graph with bounded diameter, erscheint in *Random Structures and Algorithms.*

[3] Grable, D., More-than-nearly-perfect packings and partial designs, Preprint, 1994, zur Veröffentlichung eingereicht.

[4] Hundack, C., Prömel, H.J., Steger, A., Extremal graph problems for graphs with a color-critical vertex, *Combinatorics, Probability, and Computing* **2**, 465–477, 1994; Nachdruck in: *Proceedings of the Cambridge Combinatorial Conference in Honour of Paul Erdős on his 80th Birthday* (B. Bollobás, ed.), Cambridge University Press, im Druck.

[5] Kohayakawa, Y., Kreuter, B., Steger, A., An extremal problem for random graphs and the number of graphs with large even-girth, Preprint, zur Veröffentlichung eingereicht.

[6] McDiarmid, D., Steger, A., Tidier examples for lower bounds on diagonal Ramsey numbers, Preprint, 1994, zur Verffentlichung eingereicht.

[7] Prömel, H.J., Probabilistische Argumente und algorithmische Probleme in der Diskreten Mathematik, *Jahrbuch Überblicke Mathematik 1994* (S.D. Chatterji, B. Fuchssteiner, U. Kulisch, R. Liedl, Hrsg.), 28–46, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1994.

[8] Prömel, H.J., Steger, A., The asymptotic number of graphs not containing a fixed color-critical subgraph, *Combinatorica* **12**, 463-473, 1992.

[9] Prömel, H.J., Steger, A., Excluding induced subgraphs: quadrilaterals, *Random Structures and Algorithms* **2**, 55–71, 1991.

[10] Prömel, H.J., Steger, A., Excluding induced subgraphs II: extremal graphs, *Discrete Appl. Math.* **44**, 283–294, 1993.

[11] Prömel, H.J., Steger, A., Excluding induced subgraphs III: a general asymptotic, *Random Structures and Algorithms* **3**, 19–31, 1992.

[12] Prömel, H.J., Steger, A., Coloring K_{l+1}–free graphs in linear expected time, *Random Structures and Algorithms* **3**, 374–402, 1992.

[13] Prömel, H.J., Steger, A., Almost all Berge graphs are perfect, *Combinatorics, Probability, and Computing* **1**, 53–79, 1992.

[14] Prömel, H.J., Steger, A., Asymptotic structure of H-free graphs, *Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference* (N. Robertson, P. Seymour, eds.), Contemporary Mathematics **147**, American Mathematical Society, 1993.

[15] Prömel, H.J., Steger, A., Random l-colorable graphs, *Random Structures and Algorithms* **6**, 21–37, 1995.

[16] Prömel, H.J., Steger, A., Counting H-free graphs, erscheint in *Discrete Math.*.

[17] Prömel, H.J., Steger, A., On the asymptotic structure of sparse triangle free graphs, erscheint in *J. Graph Theory*.

[18] Prömel, H.J., Thumser, W., Voigt, B., Fast growing functions based on Ramsey theorems, *Discrete Math.* **95**, 341–358, 1991.

[19] Prömel, H.J., Voigt, B., *Aspects of Ramsey Theory*, erscheint in der Reihe "Algorithms and Combinatorics", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[20] Prömel, H.J., Voigt, B., Graham-Rothschild parameter sets, in: *Mathematics of Ramsey Theory* (J. Nešetřil und V. Rödl, eds.), Springer Verlag, Berlin 1990, 113–149.

[21] Prömel, H.J., Voigt, B., Ramsey theory for Cantor space, *Rostocker Mathematisches Kolloquium* **39**, 21–34, 1990.

[22] Prömel, H.J., Voigt, B., Graham-Rothschild parameter words and measurable partitions, *Combinatorica* **11**, 253–259, 1991.

[23] Steger, A., *Die Kleitman-Rothschild Methode*, Dissertation, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Universität Bonn, Februar 1990.

[24] Steger, A., *Asymptotic Properties of H-free Graphs*, Habilitationsschrift, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Universität Bonn, November 1993.

[25] Taraz, A., *Szemerdis Regularittslemma*, Diplomarbeit, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Universität Bonn, April 1995.

Weitere im Text zitierte Literatur

[26] Alekseev, V.E., On the entropy values of hereditary classes of graphs, Discrete Math. Appl. **3**, 191–199, 1993.

[27] Ajtai, M., Komlós, J., Pintz, J., Spencer, J., Szemerédi, E., Extremal uncrowded hypergraphs, *J. Combinatorial Theory, Series A* **32**, 321–335, 1982.

[28] Ajtai, M., Komlós, J., Szemerédi, E., A note on Ramsey numbers, *J. Combinatorial Theory, Series A* **29**, 354–360, 1980.

[29] Alon, N., Lefmann, H., Rödl, V., On an anti-Ramsey type result, in *Sets, Graphs and Numbers*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 60, Budapest 1991, pp. 9–22.

[30] Babai, L., Simonovits, M., Spencer, J., Extremal subgraphs of random graphs, *J. Graph Theory* **14**, 599–622, 1990.

[31] Beck, J., On size Ramsey number of paths, trees, and circuits I, *J. Graph Theory* **7**, 115–129, 1983.

[32] Beck, J., On size Ramsey number of paths, trees, and circuits II, in *Mathematics of Ramsey Theory* (Nešetřil, J., Rödl, V., eds), Algorithms and Combinatorics 5, Springer-Verlag, Berlin 1990, pp. 34–45.

[33] Bollobás, B., Personal communication.

[34] Bollobás, B., Thomason, A.G., Hereditary and monotone properties of graphs, Preprint 1994.

[35] Deuber, W., A generalization of Ramsey's theorem, in *Infinite and Finite Sets* (Hajnal, A., Rado, R., Sós, V.T., eds), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland, Amsterdam 1975, pp. 323–332.

[36] Erdős, P., Hajnal, A., Pósa, L., Strong embeddings of graphs into colored graphs, in *Infinite and Finite Sets*, (Hajnal, A., Rado, R., Sós, V.T., eds), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland, Amsterdam 1975, pp. 585–595.

[37] Frankl, P., Rödl, V., Near perfect coverings in graphs and hypergraphs, *Europ. J. Combinatorics* **6**, 317–326, 1985.

[38] Füredi, Z., Random Ramsey graphs for the four-cycle, *Discrete Math.* **126**, 407–410, 1994.

[39] Graham, R.L., Rödl, V., Numbers in Ramsey theory, in *Surveys in Combinatorics 1987* (Whitehead, C., ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series 123, Cambridge University Press, Cambridge 1987, pp. 112–153.

[40] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Ramsey and Turán type results for cycles in pseudo-random graphs, manuscript, 1992.

[41] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., On an anti-Ramsey property of Ramanujan graphs, erscheint in *Random Structures and Algorithms.*

[42] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., The size-Ramsey number of trees, *Israel J. Math.* **89**, 261–274, 1995.

[43] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., The induced size-Ramsey number of cycles, erscheint in *Combinatorics, Probability, and Computing.*

[44] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles, erscheint in *Combinatorica.*

[45] Haxell, P.E., Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles, erscheint in *J. Combinatorial Theory, Series B.*

[46] Kim, J.H., The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$, Preprint, December 1994.

[47] Kohayakawa, Y., The regularity lemma of Szemerédi for sparse graphs, Preprint, 1993.

[48] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Sparse anti-Ramsey graphs, *J. Combinatorial Theory, Series B* **63**, 146–152, 1995.

[49] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Rödl, V., On K^4-free subgraphs of random graphs, in Vorbereitung.

[50] Pippenger, N., Spencer, J., Asymptotic behaviour of the chromatic index for hypergraphs, *J. Combinatorial Theory, Series A* **51**, 24–42, 1989.

[51] Prömel, H.J., Voigt, B., Canonizing Ramsey theorems for finite graphs and hypergraphs, *Discrete Math.* **54**, 49–59, 1985.

[52] Rödl, V., On a packing and covering problem, *Europ. J. Combinatorics* **5**, 69–78, 1985.

[53] Rödl, V., Tuza, Zs., Rainbow subgraphs in properly edge-coloured graphs, *Random Structures and Algorithms* **3**, 175–182, 1992.

[54] Rödl, V., The dimension of a graph and generalized Ramsey theorems, Thesis, Charles University, Praha, 1973.

[55] Rödl, V., Ruciński, A., Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties, in *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty* (Volume 1), Keszthely (Hungary), Bolyai Soc. Math. Studies, 1993, pp. 317-346.

[56] Rödl, V., Ruciński, A., Threshold functions for Ramsey properties, erscheint in *J. Amer. Math. Soc.*.