

Uma interpretação do algoritmo das eleições proporcionais

Severino Toscano Melo
IME - USP

Introdução

A *Coluna do Botelho* da **RPM** 37 descreve o interessante algoritmo usado no Brasil para a distribuição das cadeiras de um Parlamento eleito por *eleição proporcional*. Esse sistema político coloca o seguinte problema matemático: como dividir um número inteiro de objetos (as C cadeiras de um Parlamento) em n partes inteiras (onde n é o número de partidos que se qualificam a ter representação), proporcionalmente a n números dados (as votações obtidas pelos n partidos).

A divisão proporcional das C cadeiras quase certamente resultará em números fracionários. É razoável que cada partido tenha, então, pelo menos a parte inteira do número que lhe cabe por divisão proporcional. Mas qualquer critério de aproximação ou arredondamento que se use para dividir as sobras determinará bancadas de tamanhos não mais proporcionais às votações obtidas pelos partidos. A escolha de um algoritmo para distribuir as cadeiras restantes deve ter como objetivo maximizar as vantagens ou minimizar os defeitos de uma distribuição final necessariamente imperfeita. Está aí o aspecto subjetivo, ou político, do problema: a definição do que será bom ou ruim num eventual divisão de cadeiras.

Proponho-me aqui a tentar inferir qual o princípio que norteou a elaboração da regra, a partir de uma interpretação aritmética do algoritmo descrito pelo nosso colega Manoel H. C. Botelho. É impossível provar matematicamente que o legislador teve tal ou qual intenção. O que este artigo demonstra é que, se o legislador estivesse imbuído de um certo objetivo (definido precisamente mais a frente), ele teria chegado ao atual algoritmo de divisão das *sobras*. Mas isso pode ser só coincidência. A intenção poderia ter sido outra e, ainda assim, o algoritmo resultante poderia ter sido o mesmo. Caberia talvez uma pesquisa histórico-legal para descobrir qual princípio norteou o estabelecimento desse critério.

Análise do algoritmo

Supomos, para leitura deste artigo, que o leitor está familiarizado com o algoritmo descrito no artigo *da Coluna do Botelho* da **RPM** 37.

Seja V o número total de votos válidos apurados e C o de cadeiras a serem distribuídas, lembramos que $Q = \frac{V}{C}$ é o chamado *quociente eleitoral*. Idealmente, se não fosse impossível atribuir uma fração de cadeira a um partido, cada cadeira do Parlamento representaria Q eleitores. Por isso, se um partido teve V votos, é razoável determinar, *a priori*, que ele terá pelo menos a parte inteira de $\frac{V}{Q}$ em números de cadeiras. De fato, assim determina a lei, que estabelece, também, que os partidos com $\frac{V}{Q} < 1$ sejam desqualificados e não participem dos passos seguintes da distribuição de cadeiras.

Após a distribuição inicial vêm as etapas seguintes do algoritmo que formam *a distribuição das sobras*.

Suponhamos que os n partidos que se qualificaram, P_1, \dots, P_n , tiveram, respectivamente, v_1, \dots, v_n votos. Suponhamos que a esses partidos sejam atribuídas k_1, \dots, k_n cadeiras do Parlamento, respectivamente. Como medir a qualidade ou imperfeição dessa distribuição de cadeiras, tendo como axioma político que o número de cadeiras de cada partido deveria ser proporcional ao número de votos?

Cada quociente $\frac{v_i}{k_i}, 1 \leq i \leq n$, mede o número de eleitores representado por cada cadeira do partido P_i . Chamemos que q o menor desses n quocientes. Como q depende de k_1, \dots, k_n , usaremos às vezes a notação $q(k_1, \dots, k_n)$. Veremos a seguir que a distribuição das sobras é feita de modo a maximizar q a cada passo.

Vejamos a atribuição da 1.^a sobra. Sejam c_1, c_2, \dots, c_n as partes inteiras dos quocientes $\frac{v_1}{Q}, \frac{v_2}{Q}, \dots, \frac{v_n}{Q}$. Calculemos o valor que assumiria caso o primeiro passo da distribuição das sobras atribuisse uma cadeira nova ao partido P_r . Segue da definição dos c_i 's que

$$\frac{v_r}{c_r+1} < Q \leq \frac{v_i}{c_i}, \text{ para todo } i.$$

Temos portanto:

$$q(c_1, \dots, c_{r-1}, c_r + 1, c_{r+1}, \dots, c_n) = \frac{v_r}{c_r + 1}.$$

Escolhendo j tal que $\frac{v_j}{c_j+1}$ seja o maior dos valores de $\frac{v_r}{c_r+1}, 1 \leq r \leq n$, e atribuindo a P_j a

nova cadeira, estaremos, nesta etapa, escolhendo o partido que ganha a nova cadeira de modo a maximizar q . Mais do que isso, o partido que recebeu a nova cadeira passa a ser aquele

para o qual o quociente $\frac{v}{k}$ é mínimo.

Nas etapas seguintes, também será verdade que, após a atribuição da nova cadeira, o menor

dos novos quocientes $\frac{v}{k}$ será atingido precisamente pelo partido que tiver ganho a nova

cadeira. Isso é consequência da maneira com que os inteiros c_1, \dots, c_k são escolhidos na primeira etapa. É o que veremos com a ajuda da definição e da proposição seguintes.

Definição: Uma n -upla de inteiros positivos (k_1, \dots, k_n) é dita *razoavelmente justa* (com

respeito aos números inteiros fixados v_1, \dots, v_n) se vale a desigualdade $\frac{v_i}{k_i+1} \leq q(k_1, \dots, k_n)$,

para todo i entre 1 e n .

Observação: Segue imediatamente das definições que, se a n -upla (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa, então

$$q(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \dots, k_n) = \frac{v_i}{k_i+1}, \text{ para } i \text{ entre } 1 \text{ e } n.$$

Voltemos agora ao algoritmo de distribuição das sobras. Segue da afirmação (1) que a n -upla (c_1, \dots, c_n) determinada pelo primeiro passo do algoritmo é razoavelmente justa. A lei prescreve que, a cada passo da distribuição das sobras, seja somada uma cadeira à bancada do partido P_j que maximize os quocientes $\frac{v_i}{k_i+1}$.

A proposição a seguir mostra que, em todas as etapas do processo, as n -uplas obtidas são razoavelmente justas. Da observação segue também que, ao atribuirmos a nova cadeira a P_j , estamos tornando o novo q o menor possível ao fim daquele passo.

Proposição: Se uma certa n -upla (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa, e se j é um inteiro entre 1 e n tal que $\frac{v_j}{k_j+1} = \max \left\{ \frac{v_1}{k_1+1}, \dots, \frac{v_n}{k_n+1} \right\}$, então a n -upla $(k_1, \dots, k_{j-1}, k_j+1, k_{j+1}, \dots, k_n)$ também é razoavelmente justa.

Demonstração: Sejam l_1, \dots, l_n os inteiros $l_i = k_i$, se $i \neq j$; e $l_j = k_j + 1$. Seja m um inteiro entre 1 e n tal que $\frac{v_m}{l_m + 1} = \max\left\{\frac{v_1}{l_1 + 1}, \dots, \frac{v_n}{l_n + 1}\right\}$.

Caso 1: $m = j$. Nesse caso $\frac{v_m}{l_m + 1} = \frac{v_j}{k_j + 2} < \frac{v_j}{k_j + 1} \leq \frac{v_i}{k_i} = \frac{v_i}{l_i} \quad \forall i \neq j = m$, pois (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa. Logo, (l_1, \dots, l_n) é razoavelmente justa.

Caso 2: $m \neq j$. Segue da definição de j que $\frac{v_m}{k_m + 1} \leq \frac{v_j}{k_j + 1}$. Segue então da definição de m que, para todo i entre 1 e n , valem as desigualdades: $\frac{v_p}{l_p + 1} \leq \frac{v_m}{l_m + 1} = \frac{v_m}{k_m + 1} \leq \frac{v_j}{k_j + 1} = \frac{v_j}{l_j}$. Além disso, como a n -upla (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa, então, se $i \neq j$, temos $\frac{v_p}{k_p + 1} \leq \frac{v_i}{k_i} = \frac{v_i}{l_i}$, para todo p entre 1 e n . Portanto, (l_1, \dots, l_n) é razoavelmente justa.

Um problema de máximo global

Partindo do princípio de que distribuição boa é aquela que tem q grande, somos naturalmente levados à seguinte questão:

Será que o algoritmo da lei eleitoral, ao maximizar q a cada passo, leva-nos ao máximo valor de q dentre todas as possíveis distribuições de cadeiras com $k_1 + \dots + k_n = C$?

É possível demonstrar (ver abaixo) que, se (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa e se (l_1, \dots, l_n) é outra n -upla de números positivos e inteiros tal que $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n k_i$, então $q(l_1, \dots, l_n) \leq q(k_1, \dots, k_n)$. (*)

Demonstração: Segue das hipóteses que existe algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $l_j > k_j$, logo, $l_j \geq k_j + 1$. Como (k_1, \dots, k_n) é razoavelmente justa, segue $\frac{v_j}{l_j} \leq \frac{v_j}{k_j + 1} \leq q(k_1, \dots, k_n)$ e da definição de q temos $q(l_1, \dots, l_n) \leq \frac{v_j}{l_j}$.

Vimos na seção anterior que a n -upla de partida do algoritmo da lei eleitoral é razoavelmente justa e que, a cada passo da distribuição das sobras, são obtidas n -uplas razoavelmente justas. Em particular, a distribuição final de cadeiras é razoavelmente justa e, portanto, a

resposta à pergunta acima é *sim*.

Um exemplo numérico

Cinco partidos P_1, P_2, \dots, P_5 disputam oito cadeiras de uma câmara municipal e obtêm, respectivamente, as votações:

$$v_1 = 1138, \quad v_2 = 3306, \quad v_3 = 2475, \quad v_4 = 1654, \quad v_5 = 439.$$

O total dos votos válidos (lembrando que, agora, voto em branco é considerado nulo, como informado na **RPM** 38, pág. 37) é $V = 9012$ e o quociente eleitoral é o maior inteiro de $\frac{9012}{8}$, que é $Q = 1126$.

Como $v_5 < Q$, o partido P_5 é eliminado. A 4-upla das partes inteiras de $\frac{v_i}{Q}$ é $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 2, 2, 1)$. Sobram, portanto, duas cadeiras. Na primeira etapa da distribuição das sobras, atribui-se uma nova cadeira a P_2 . O algoritmo nos leva então à 4-upla $(1, 3, 2, 1)$ que satisfaz $q(1, 3, 2, 1) = \frac{v_2}{3} = 1102$.

A segunda sobra vai para P_4 e a 4-upla final do algoritmo é $(1, 3, 2, 2)$ que satisfaz $q(1, 3, 2, 2) = \frac{v_4}{2} = 827$.

Sem usar o resultado teórico (*), uma maneira de verificar que $(1, 3, 2, 2)$ é um ponto de máximo global para $q(k_1, \dots, k_4)$, com $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 8$, seria calcular q de toda 4-upla cuja soma resultasse 8.

Uma maneira alternativa é usar o argumento:

Se $k_1 > 1$, então $q(k_1, \dots, k_4) \leq \frac{v_1}{k_1} < \frac{v_1}{2} = 569 < q(1, 3, 2, 2)$. Analogamente, se $k_2 > 3$, então

$q(k_1, \dots, k_4) \leq \frac{v_2}{4} = 826,5 < q(1, 3, 2, 2)$; e, se $k_3 > 2$, então

$q(k_1, \dots, k_4) \leq \frac{v_3}{3} = 825 < q(1, 3, 2, 2)$. Além disso, se $k_4 > 2$, então

$q(k_1, \dots, k_4) \leq \frac{v_4}{2} = q(1, 3, 2, 2)$. Logo, a 4-upla na qual q assume o máximo deve satisfazer $k_1 \leq 1$, $k_2 \leq 3$, $k_3 \leq 2$, $k_4 \leq 2$ e $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 8$. Ou seja, ela tem que ser $(1, 3, 2, 2)$.

Gostaria de agradecer ao Professor Antônio Luiz Pereira por conversas a respeito do assunto, e ao Professor Carlos Isnard por ter dado a definição de n -uplas razoavelmente justas, o que me permitiu melhorar a versão original deste artigo.

Severio Toscano do Rego Melo é professor do Instituto de Matemática e Estatística da USP desde 1992, tendo sido anteriormente docente da UFPE. Nasceu no Recife em 1960. Fez graduação e mestrado na UFPE e doutorado na Universidade da Califórnia, Berkeley.
