Notação: Denotamos por $f \circ g$ a composição da função f com a função g, isto é, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, para todo x no domínio de g tal que $g(x)$ pertença ao domínio de f.

Teorema Se g é derivável em a, se f é derivável em b, e se $b = g(a)$, então a composta $(f \circ g)$ é derivável em a e $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

Demonstração: Defina, para todo u no domínio de f,

$$h(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(g(a))}{u-g(a)}, & \text{se } u \neq g(a) \\ f'(g(a)), & \text{se } u = g(a) \end{cases} .$$

Segue imediatamente das definições de continuidade e de derivada que h é contínua em $g(a)$. E segue imediatamente da definição de h que

$$(u - g(a))h(u) = f(u) - f(g(a)),$$

para todo u no domínio de f. Substituindo u por $g(x)$ na equação acima, vem:

$$(g(x) - g(a)) \cdot h(g(x)) = f(g(x)) - f(g(a)),$$

para todo x onde $f(g(x))$ esteja definida. Dividindo por $(x - a)$, obtemos:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot h(g(x)) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \tag{1}$$

Como h é contínua em $g(a)$ e g é contínua em a, temos

$$\lim_{x \to a} h(g(x)) = h(g(a)).$$

Por definição, $h(g(a))$ é igual a $f'(g(a))$. Para concluir a demonstração, basta agora tomarmos o limite quando x tende a a nos dois membros da equação (1).

Observação: Na demonstração acima, omitimos o seguinte detalhe técnico. Faz parte da nossa definição de derivada que, para uma função ser derivável em um ponto, ela precisa estar definida em um intervalo aberto contendo o ponto. Usando que g é contínua em a e seu domínio contém um intervalo aberto contendo a, e que o domínio de f contém um intervalo aberto contendo $g(a)$, é possível provar que o domínio de $f \circ g$ (isto é, o conjunto dos x no domínio de g tais que $g(x)$ pertence ao domínio de f) contém um intervalo aberto em torno de a.