

Problemas de Equações Diferenciais Parciais

- (1) Verifique se existe uma função u harmônica para $x^2 + y^2 < a^2$ (onde $a > 0$), contínua em $x^2 + y^2 \leq a^2$, que coincide com a função $2x - y^3$ em $S_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$ e que assume o valor a na origem.
- (2) Verifique que a função u definida por $u(x, y) = (1 - x^2 - y^2)/(1 - 2x + x^2 + y^2)$ se $x^2 + y^2 < 1$, $u(x, y) = 0$ para $x^2 + y^2 = 1$ é harmônica na bola $B_1(0)$. O princípio do máximo se aplica para u na bola unitária fechada? Por quê?
- (3) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica. Prove que se $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, então para todo $x \in B_R(x_0)$ vale:

$$|u(x)| \leq \frac{1}{R-r} \left(\frac{K}{\pi} \right)^{1/2},$$

onde $K = \int_{B_R(x_0)} u^2(y) dy$ e $r = |x - x_0|$.

- (4) Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Suponha que existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C(1 + |x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que u é um polinômio de ordem 1.
- (5) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$. Para $x \in \Omega$, defina

$$U(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|y|=1} u(x + ry) d\sigma(y) \right)$$

- (a) Prove que o limite existe.
- (b) Prove que $U(x) = (1/2)\Delta u(x)$.
- (c) Prove que: se $u \in C^2(\Omega)$ e se para todo $x \in \Omega$ existe uma sequência $r_j \rightarrow 0$ dependendo de x tal que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|y|=1} u(x + r_j y) d\sigma(y) = u(x),$$

então u é harmônica em Ω .

- (6) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma solução de

$$\Delta u + \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = 0,$$

onde $c(x) < 0$ em Ω . Prove que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ implica $u = 0$ em Ω .

- (7) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e seja $\{u_m\}$ uma sequência de funções harmônicas em Ω que converge em $L^p(K)$, $1 \leq p < \infty$ para todo $K \subset \Omega$ compacto para uma função u . Prove que u é harmônica em Ω .
- (8) Seja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x < \pi, y > 0\}$.
 - (a) Provar que toda função contínua limitada $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, que é harmônica em Ω e nula na fronteira de Ω é identicamente nula.

(b) O mesmo ainda vale se não exigirmos que u seja limitada? Justifique.

(9) Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Mostre que, se $n \geq 2$, cada valor da imagem de u é assumido infinitas vezes. E quando $n = 1$?

(10) Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in C^2(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Mostre que

$$-\Delta u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ u(x_0) - \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + rx) d\sigma(x) \right\}$$

onde S^{n-1} denota a esfera unitária em \mathbb{R}^n e $|S^{n-1}|$ sua área.

Sugestão: Escreva o desenvolvimento de Taylor de ordem 2 de u em volta de x_0 .

(11) (a) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto não vazio e seja V_n o volume da bola unitária de \mathbb{R}^n . Prove que, se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, então para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ vale

$$\sup_{x \in K} |u(x)| \leq \frac{1}{(d(K, \partial\Omega))^n V_n} \|u\|_1,$$

onde $\|u\|_1$ denota a norma de u em $L^1(\Omega)$. Discuta o que ocorre no caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ e em particular conclua o seguinte fato: “Se u é harmônica em \mathbb{R}^n e $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $u \equiv 0$ ”.

(b) Deduza de (a) que, se $\{u_m\}$ for uma sequência de funções harmônicas em Ω e se u for uma função mensurável em Ω , tal que, para cada subconjunto compacto K de Ω , vale

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_K |u_m - u| dx = 0$$

então existe uma função v harmônica em Ω tal que $v = u$ quase sempre em Ω .

(c) Mesmas hipóteses de (a), se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, prove que para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ vale

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{n}{d(K, \partial\Omega)} \|u\|_\infty, j = 1, \dots, n.$$

conclua que a sequência $\{u_m\}$ do item (b) tem a seguinte propriedade: “Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha u_m$ converge para $\partial^\alpha v$ uniformemente sobre cada compacto de Ω ”.

(12) Seja $u : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ solução do problema

$$\Delta u = 0, \quad \text{em } B_1(0), \quad u|_{S^2} = x^2 + y^2$$

onde $B_1(0)$ é a bola unitária do \mathbb{R}^3 . Calcule $u(0)$.

(13) Seja u a solução limitada do problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R}_+^2 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

a) Prove que, se f for contínua e limitada então u é de classe \mathcal{C}^∞ no semiplano $t > 0$.

b) Seja $\mathcal{C}_*^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f^{(j)} \text{ é limitada em } \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, \dots\}$. Prove que se $f \in \mathcal{C}_*^\infty(\mathbb{R})$ então u é de classe \mathcal{C}^∞ no semiplano $t \geq 0$ e que suas derivadas de todas as ordens (em x e em t) são limitadas.

(14) Seja u a solução limitada do problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

com f contínua e limitada em \mathbb{R} .

Suponha que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} u(0, t) = A$. Prove que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = A$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(15) Seja $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ satisfazendo

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

Suponha que exista $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $u(\cdot, t_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall t \geq t_0$, e que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(16) Seja $\Omega =]0, \pi[\times]0, \infty[$.

a) Prove a existência de solução do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{em } \Omega \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, && \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), && \forall x \in [0, \pi] \\ u &\in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \end{aligned}$$

para toda f de classe \mathcal{C}^2 em $[0, \pi]$, com $f(0) = f(\pi) = 0$.

b) Usando o princípio do máximo, prove o mesmo resultado, quando f é apenas contínua em $[0, \pi]$ com $f(0) = f(\pi) = 0$.

(17) Determine explicitamente (isto é, sem ser na forma integral) a solução limitada de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= \text{sen } x e^{-x^2}, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(18) Ache uma solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) && \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= \alpha, \quad u(L, t) = \beta \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

$g, f \in \mathcal{C}^2((0, L)) \cap \mathcal{C}^1([0, l])$, α, β constantes, $f(0) = \alpha, f(L) = \beta, g(0) = g(L) = 0$. Esta solução é única?

Sugestão: Reduza primeiro ao caso $\alpha = \beta = 0$, através de uma mudança de variáveis do tipo $v(x, t) = u(x, t) + Ax + B$.

(19) Seja $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ limitada. Verifique que a solução limitada do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, & (x, t) &\in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

é dada por:

$$u(x, t) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} u_0(x - 2\sqrt{t}y) dy, \quad t \geq 0.$$

Prove que: se existirem constantes positivas M e δ tais que $|u_0(x)| \leq M e^{-\delta|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$|u(x, t)| \leq M(1 + 4\delta t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\delta|x|^2}{1+4\delta t}},$$

para todo $t \geq 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Conclua que, se u_0 tem suporte compacto, então $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, uniformemente para $x \in \mathbb{R}^n$.

(20) a) Determine as curvas características (incluindo as reflexões), o período (em relação a t) das soluções e o domínio de influência do ponto $(1/5, 0)$ (esboçando o gráfico) do problema

$$u_{tt} = 3u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

b) Ache a solução do problema acima com as condições iniciais:

$$u(x, 0) = (x^2 - x)^3, \quad u_t(x, 0) = \text{sen } \pi x$$

(21) Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + 10u_t &= 0 & \text{para } 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= \text{sen } 3x & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) &= 0 & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) &= u(\pi, t) & t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(22) Ache a solução geral de:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{3}{2}u_{tx} - 4u_x + u_t - 6u$$

Sugestão: Faça $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$.

(23) Seja $u(x, t)$ solução do problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & (x, t) &\in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \quad u_0 &\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \quad u_1 &\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Suponha que para algum $\alpha > 0$,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_0(x)}{|x|^\alpha} = A, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha-1}} = B.$$

Prove que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} u(x, t) = C$. Determine C .

- (24) Seja u uma solução de classe \mathcal{C}^2 da equação $u_{xx} = u_{yy}$ em um aberto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja \mathcal{R} um retângulo em Ω , cujos lados têm declividades $+1$ e -1 . Sejam A e C (resp. B e D) vértices opostos de \mathcal{R} . Prove que $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.
- (25) Sejam $a > 0$, $c > 0$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ uma função par tal que $\phi(r) = 0$ para $|r| > a$, e $\Omega = \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.
- a) Determine a solução $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ do problema

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 \Delta v && \text{em } \Omega \\ v(x, 0) &= \phi(x), && x \in \mathbb{R}^3 \\ v_t(x, 0) &= 0, && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

b) Seja ϕ_n uma sequência de funções pares, de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nulas para $|r| > a$, tal ϕ_n convirja pontualmente para ψ , onde $\psi = \chi_{[-a, a]}$. Verifique que as soluções v_n , correspondentes ao problema com dado inicial $\phi = \phi_n$, convergem pontualmente para uma função u . Determine u , para $r > a$. Faça o gráfico de $u(|x_0|, t)$, como função de t , para um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ dado, com $|x_0| > a$.

Obs.: este problema é um modelo do que ocorre com a pressão do ar, quando se fura uma bexiga.

- (26) Sejam $\rho \in \mathcal{C}([a, b])$, $K \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $\rho > 0$, $K > 0$. Mostre que se $u \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R})$ satisfaz

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) && \text{em }]a, b[\times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= 0, && x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) &= 0, && x \in [a, b] \\ u(a, t) = u(b, t) &= 0, && \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

então $u = 0$. Sugestão: Considere a “Função Energia”

$$E(t) = \frac{1}{2} \int [\rho(x) (u_t(x, t))^2 + K(x) (u_x(x, t))^2] dx$$

- (27) Demonstrar que: para que o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) &= f(x_1)g(x_2, x_3), \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

possua uma solução, é suficiente que a função g seja harmônica e que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Achar esta solução.

(28) Considere o problema de Cauchy

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$

$$u(x, 0) = f(x_1) + g(x_2), \quad u_t(x, 0) = F(x_1) + G(x_2)$$

Dê condições suficientes mínimas de diferenciabilidade das funções f , g , F , G para que o problema acima tenha solução clássica. Determine a solução.

(29) Seja u a solução da equação das ondas

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x),$$

onde $g, h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Provar que existe uma constante $C > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq Ct^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$.