MAT 5798 - Medida e Integração

3ª Prova - 11 de julho de 2005

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

É permitido consultar apenas o Rudin (Real & Complex Analysis). As citações referem-se à sua segunda edição.

1ª Questão. (2 pts) Sejam p, q e r pertencentes a $[1,\infty]$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Seja X um espaço de medida e sejam f e g funções mensuráveis de X em $\mathbb{C}$. Mostre que

$$||fg||_r \ \leq \ ||f||_p||g||_q.$$

Sugestão: Use o Teorema 3.8.

2ª Questão. (2 pts) Seja X um espaço de medida finita e sejam p e q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Mostre que $L^q(X) \subset L^p(X)$.

(b) Calcule a norma da inclusão, isto é, encontre a menor constante $C \geq 0$ tal que $||f||_p \leq C||f||_q$ para toda $f \in L^q(X)$.

3ª Questão. (2 pts) Sejam $\mathfrak{M}$ a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e m a medida de Lebesgue. Defina uma medida complexa λ em $\mathfrak{M}$ por

$$\lambda(E) = m(E \cap [-1,+1]) + i\delta_0(E) - \delta_2(E), \quad E \in \mathfrak{M},$$

onde δ_0 e δ_2 denotam as medidas de Dirac concentradas em 0 e em 2, respectivamente.

(a) Calcule $|\lambda|(\mathbb{R})$.

(b) Determine a medida λ_s e a função h que correspondem a λ pelo Teorema 6.9 (com $\mu = m$, lembrando que o teorema vale também para λ complexa e μ σ-finita).

4ª Questão. (2 pts) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável à Lebesgue. Mostre que o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ mensurável à Lebesgue.

5ª Questão. (2 pts) Dadas f e g em $C_c((0,\infty))$, defina

$$(f\sharp g)(x) = \int_0^\infty \frac{f(x/y)g(y)}{y}\,dy \quad \text{e} \quad ||f||_1 = \int_0^\infty \frac{|f(x)|}{x}\,dx.$$

Mostre que $f\sharp g \in C_c((0,\infty))$ e que $||f\sharp g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.