MAT 5798 - Medida e Integração

2ª Prova - 17 de maio de 2005

É permitido consultar apenas o Rudin (Real & Complex Analysis). As citações referem-se à sua segunda edição.

1^a **Questão.** (2,5 pts) Dado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotamos $||x|| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$. Chamamos de *retângulo* um produto cartesiano de intervalos limitados, cada um deles podendo conter um, dois ou nenhum de seus extremos. Um *quadrado* é um retângulo cujos lados têm todos o mesmo comprimento.

(a) Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que E é mensurável à Lebesgue e tem medida nula se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existem quadrados Q_j, $j \in \mathbb{N}$, tais que $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) < \epsilon$ (onde m é a medida de Lebesgue).

(b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, tal que existe $K > 0$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||$, para todos x e y em $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se $E \subset \mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue nula, então $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ também tem.

Dicas: A imagem de um quadrado por uma tal f está contida em um retângulo, não muito maior que o quadrado dado. Todo aberto de $\mathbb{R}^n$ se escreve como união disjunta de uma família enumerável de quadrados (Seção 2.19).

2^a **Questão.** (2 pts) Seja μ uma medida de Borel regular em X, um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Define-se o suporte de μ, denotado por $\operatorname{supp}\mu$, como sendo o complementar da união de todos os abertos de medida nula.

(a) Mostre que o complementar de $\operatorname{supp}\mu$ é um aberto de medida nula.

(b) Mostre que um dado ponto pertence a $\operatorname{supp}\mu$ se e somente se todo aberto que o contém tem medida positiva.

3^a **Questão.** (3 pts) Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto cujos abertos são todos σ-compactos. Seja μ uma medida de Borel regular em X finita em cada compacto, e seja $g \in C_c(X)$, $g \geq 0$.

(a) Mostre que existe uma única medida de Borel ν em X tal que

$$\int_X \varphi \, d\nu = \int_X \varphi g \, d\mu, \quad \text{para toda} \;\; \varphi \in C_c(X).$$

(b) Mostre que ν é regular.

(c) Mostre que $\operatorname{supp}\nu \subseteq \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp} g$.

(d) Mostre que $\operatorname{supp}\mu \cap \{x \in X; g(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}\nu$.

(e) Decida se vale a igualdade $\operatorname{supp}\nu = \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp} g$.

Definição: Uma medida de Borel μ é regular se todo boreliano E satisfaz $\mu(E) = \inf\{\mu(V); V \text{ aberto}, E \subseteq V\}$ e $\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$.

4^a **Questão.** (2,5 pts) Para cada subconjunto E de $\mathbb{R}^2$, e para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos $E_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in E\}$. Dê a $\mathbb{R}^2$ a seguinte topologia: um subconjunto V é aberto se e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$, V_x é aberto. Seja Λ o funcional definido no Problema 17 do Capítulo 2, e seja $\mathfrak{M}$ a σ-álgebra a ele associada pelo Teorema 2.14. Mostre que um dado $E \subseteq \mathbb{R}^2$ pertence a $\mathfrak{M}$ se e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$, E_x é um subconjunto de $\mathbb{R}$ mensurável à Lebesgue.

Dica: Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto, seja Λ um funcional linear positivo em $C_c(X)$, e seja $Y \subseteq X$ aberto. Podemos encarar $C_c(Y)$ como um subespaço de $C_c(X)$ (decretando que seus elementos são nulos fora de Y), e restringir Λ a ele, obtendo assim um funcional linear positivo $\Lambda_Y : C_c(Y) \to \mathbb{C}$. Chame de $\mathfrak{M}_X$ e de $\mathfrak{M}_Y$, respectivamente, as σ-álgebras induzidas por Λ e Λ_Y em X e em Y. A demonstração do Teorema 2.14 mostra que, dado $E \subseteq Y$, $E \in \mathfrak{M}_X$ se e somente se $E \in \mathfrak{M}_Y$. Justifique brevemente esta afirmação, se for usá-la. Sugiro que o faça para $Y = \{x\} \times \mathbb{R}$, identificado com $\mathbb{R}$.