MAT 5798 - Medida e Integração

2ª Prova - 27 de maio de 2010

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

1	
2	
3	
4	
Total	

1ª Questão. Sejam μ uma medida positiva em X e $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Defina $\omega(\alpha) = \mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \alpha^p \omega(\alpha) = 0$.

2ª Questão. Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto, Λ um funcional linear positivo em $C_c(X)$ e $Y \subseteq X$ um aberto. Considere $C_c(Y)$ como um subespaço de $C_c(X)$ da maneira canônica (por extensão nula), denote por Λ^Y a restrição de Λ a $C_c(Y)$ e por $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{M}^Y, \mu^Y)$ os espaços de medida associados a Λ e a Λ^Y, respectivamente, pelo teorema da representação de Riesz. Mostre que $\mathcal{M}^Y = \{E \cap Y;\, E \in \mathcal{M}\}$ e que $\mu^Y(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}^Y$.

3ª Questão. Seja μ a medida de Lebesgue em $(0,1)$ e seja λ a medida de contagem definida nos mensuráveis à Lebesgue de $(0,1)$. Mostre que $\mu \ll \lambda$ e que não existe $h \in L^1(\lambda)$ tal que $d\mu = h\, d\lambda$. Por que isto não contradiz o Teorema de Radon-Nikodym?

4ª Questão. Dada uma medida complexa de Borel μ em $\mathbb{R}$, defina $f(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que f é contínua à direita.

(b) Mostre que, se μ for absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, então f é contínua.