**MAT 5798 - Medida e Integração**

**1ª Prova - 8 de abril de 2010**

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Total | |

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Nas duas primeiras questões, $\mu$ é uma medida positiva em $X$.

**1ª Questão.** Sejam $f_n : X \to \mathbb{C}$ pertencentes a $L^1(X)$, $n = 1, 2, \cdots$, e suponha que a sequência $f_n$ converge uniformemente para $f$.

(a) Mostre que, se $\mu(X)$ é finita, então $\lim\limits_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

(b) Dê contra-exemplo que mostre que a conclusão acima pode não ser verdadeira se $\mu(X) = \infty$.

**2ª Questão.** Seja $f \in L^1(X)$ tal que $|f(x)| < 1$ todo $x \in X$. Para cada $n = 1, 2, \cdots$, defina $g_n(x) = \dfrac{f(x)^n}{1 + n|f(x)|}$. Calcule $\lim\limits_n \int g_n \, d\mu$.

**3ª Questão.** Seja $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a $\sigma$-álgebra que consiste dos subconjuntos enumeráveis e dos subconjuntos de complementar enumerável. Seja $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ a medida definida por $\mu(E) = 0$ se $E$ é enumerável e $\mu(E) = 1$ se $E^c$ é enumerável.

(a) Mostre que $f(x) = x$ não é uma função mensurável.

(b) Mostre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ i, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, é integrável e calcule sua integral.

**4ª Questão.** (a) Sejam $X$ um conjunto, $(Y, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que $\{f^{-1}(E);\, E \in \mathfrak{M}\}$ é uma $\sigma$-álgebra em $X$. Denotaremos esta $\sigma$-álgebra por $f^*\mathfrak{M}$.

(b) Considere $Y = \{0, 1, 2\}$ e $f : \mathbb{N} \to Y$, $f(n)$ igual ao resto da divisão de $n$ por 3. Descreva as funções mensuráveis reais do espaço mensurável $(\mathbb{N}, f^*\mathcal{P}(Y))$.

(c) Defina uma medida finita não-nula no espaço mensurável do item (b) e calcule a integral de uma função mensurável positiva qualquer.