MAT 5798 - Medida e Integração
IME-USP, Segundo Semestre de 2010
Quinta Lista

Nos problemas abaixo, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ estão munidos da medida de Lebesgue.

(1) Seja $1 \leq p < \infty$, seja q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e seja $K \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

(a) Mostre que, para toda $f \in L^q(\mathbb{R})$ e para quase todo $x \in \mathbb{R}$, a função $y \mapsto K(x,y)f(y)$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que, para toda $f \in L^q(\mathbb{R})$, a função $T_K f$ definida para quase todo x por $T_K f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\,dy$ pertence a $L^p(\mathbb{R})$.

(c) Mostre que o operador linear $T_K : L^q(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ é limitado e que $||T_K|| \leq ||K||_p$.

(2) (a) Mostre que, se $K \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, então, para quase todo $x \in \mathbb{R}$, a função $y \mapsto K(x,y)$ pertence a $L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Enuncie e demonstre um resultado como o do problema anterior para $p = \infty$.