MAT 5798 - Medida e Integração - IME-USP
1^o Semestre de 2010 - 4^a Lista

(1) Seja $A \subset \mathbb{R}$ mensurável à Lebesgue e seja m a medida de Lebesgue. Suponha que existe $\delta > 0$ tal que, para cada intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $m(A \cap I) \geq \delta m(I)$. Mostre que o complementar de A tem medida nula.

(2) Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto, munido de uma medida boreliana regular μ. Defina suppμ como sendo o complementar da união de todos os abertos de medida nula.
  (a) Mostre que o complementar de suppμ tem medida nula.
  (b) Mostre que $||\phi||_\infty = \sup\limits_{x \in X} |\phi(x)|$ $\forall \phi \in C_c(X)$ se, e só se, supp$\mu = X$.

(3) Suponha que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para cada $h \in \mathbb{R}$, defina $T_h f(x) = f(x+h)$. Mostre que $\lim\limits_{h \to 0} ||f - T_h||_p = 0$. Mostre que a mesma conclusão é falsa para $p = \infty$. Dica: considere primeiro o caso em que f é contínua e tem suporte compacto, use o resultado de densidade provado em sala.

(4) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f \in L^1(\mu)$ (f é complexa). Defina $\rho(E) = \int_E f\, d\mu$, $E \in \mathcal{M}$.
  (a) Mostre que ρ é uma medida complexa.
  (b) Mostre que $|\rho|(E) = \displaystyle\int_E |f|\, d\mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$.

(5) Sejam $\mathfrak{M}$ a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e m a medida de Lebesgue. Defina uma medida complexa λ em $\mathfrak{M}$ por

$$\lambda(E) = m(E \cap [-1, +1]) + i\delta_0(E) - \delta_2(E), \quad E \in \mathfrak{M},$$

onde δ_0 e δ_2 denotam as medidas de Dirac concentradas em 0 e em 2, respectivamente.
  (a) Calcule $|\lambda|(\mathbb{R})$.
  (b) Determine a medida λ_s e a função h que correspondem a λ pelo Teorema 6.9 do texto (com $\mu = m$, lembrando que o teorema vale também para λ complexa e μ σ-finita).