MAT 5798 - Medida e Integração

1ª Prova - 12 de abril de 2005

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____

Número USP : ____________________________________

Assinatura : _____________________________________

Nas três primeiras questões, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denota um espaço de medida.

1ª Questão. Dada $f \in L^1(\mu)$, mostre que $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ é união enumerável de conjuntos de medida finita.

2ª Questão. Suponha que a medida de X é finita. Seja $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções mensuráveis uniformemente limitadas (isto é, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x)| < \infty$) tal que, para quase todo $x \in X$, $f_n(x) \to 0$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \;=\; 0.$$

3ª Questão. (a) Suponha que existe $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E)$ e $\mu(E^c)$ são diferentes de zero. Mostre então que pode ocorrer a desigualdade estrita na conclusão de Lema de Fatou. Sugestão: Considere $f_n = \chi_E$ para n par, e $f_n = 1 - \chi_E$ para n ímpar.

(b) Dê exemplo de um espaço de medida onde sempre ocorre a igualdade na conclusão do Lema de Fatou.

4ª Questão. (a) Mostre que

$$\delta(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \notin E \\ 1, & \text{se } 0 \in E \end{cases}$$

define uma medida na σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pertence a $L^1(\delta)$, valendo $\int_{\mathbb{R}} f d\delta \;=\; f(0)$. Explicite as definições ou resultados que usar.

5ª Questão. Seja I um intervalo aberto, e seja $f_n : I \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções contínuas tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| \;<\; \infty$$

Mostre que $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uma função contínua de I em $\mathbb{C}$.