MAT 5860 (Operadores Pseudodiferenciais) - 1° Semestre de 2000

1. Preliminares

Ω denota um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário. $K \subset\subset A$ significa que K é compacto contido no interior de A. $\mathbb{N}$ inclui o zero. Dados α e β em $\mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, e, se $\beta \leq \alpha$ (i.e., se $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \cdots, n$), $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Definição: Uma aplicação entre espaços topológicos é própria se a imagem inversa de compactos é compacta. Diremos que um fechado (relativo) F de $\Omega \times \Omega$ é próprio se as restrições a F das projeções $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$ forem próprias.

Problema 1 Mostre que existe $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$ valendo 1 em uma vizinhança da diagonal $\{(x,x);\, x \in \Omega\}$ e cujo suporte é próprio.

Problema 1$^\diamond$ Dado U aberto contendo a diagonal, mostre que existe ϕ como no Problema 1 e com suporte contido em U.

Problema 1* Dado um fechado próprio $F \subset \Omega \times \Omega$ contendo a diagonal, mostre que existe ϕ como no Problema 1 que é igual a 1 em uma vizinhança de F.

Problema 2 Seja $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ tal que, para todo $K \subset\subset \Omega$, existam constantes positivas C e ρ tais que $|a(x,\xi)| > C(1+|\xi|)^m$ se $x \in K$ e $|\xi| > \rho$. Mostre que existem funções positivas C e ρ pertencentes a $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tais que $|a(x,\xi)| > C(x)(1+|\xi|)^m$ se $x \in \Omega$ e $|\xi| > \rho(x)$.

Definição: O *símbolo* do operador $Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$, onde $D^\alpha u(x) = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ e $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, é a função $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

Problema 3 Mostre que, se P e Q são operadores diferenciais parciais lineares em Ω, de símbolos p e q, respectivamente, então o símbolo da composta $Ru = P(Qu)$ é $r(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{\partial_\xi^\alpha p(x,\xi) \partial_x^\alpha q(x,\xi)}{i^{|\alpha|}\alpha!}$. *Dica*: $D^\alpha(uv) = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

Problema 4 Seja X um espaço de Fréchet com as semi-normas p_k, $k \in \mathbb{N}$.

a) Sejam $x_j \in X$ tais que $\sum_{j=0}^\infty p_k(x_j)$ seja finita para todo k. Mostre que existe o limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^N x_j$, e que independe da ordem dos termos.

b) Mostre que, dados $x_j \in X$ arbitrários, $\sum_{j=0}^\infty 2^{-j} x_j / [1 + p_1(x_j) + \cdots + p_j(x_j)]$ converge.

Problema 5 Seja $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ linear, contínuo, e com imagem contida em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Munindo-se a imagem de A da topologia usual de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, mostre que o operador continuará contínuo se, e somente se, para todo $K \subset\subset \Omega$, existir $K' \subset\subset \Omega$ tal que $Au \in \mathcal{C}_c^\infty(K')$, para toda $u \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.

Problema 6 Dados abertos $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ e dado operador linear contínuo A de $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ em si próprio, mostre que $A^{\otimes} f(x,y) = [Af(\cdot,y)](x)$ define operador linear contínuo de $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ em si próprio, valendo a igualdade $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta A^{\otimes} f(x,y) = [A\partial_y^\beta f(\cdot,y)]^{(\alpha)}(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e para todo $\beta \in \mathbb{N}^m$.

Problema 7 Justifique a passagem de A para dentro da integral, logo antes do enunciado do Lema 4.2 de [3].

Problema 7* Denotemos por $\mathcal{X}$ o espaço das funções pertences a $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tais que, para todo $K \subset\subset \Omega$ e para todos α, β, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, tenhamos o supremo $\sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma f(x,\xi)|$ finito.

a) Dado $A : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, mostre que $A^{\otimes}$ leva $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$.

b) Mostre que, se $f \in \mathcal{X}$, os dois lados da igualdade abaixo fazem sentido e a igualdade se verifica:

$$A\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,\xi)d\!\!\!{}^-\xi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} Af(\cdot,\xi)d\!\!\!{}^-\xi.$$

Dica: Considere somas de Riemann sobre retângulos com vértices em $h\mathbb{Z}^n$, $h \to 0$.

Problema 8 Mostre que a função exponencial não é uma distribuição temperada em $\mathbb{R}$ (faz parte do problema formulá-lo precisamente).

Problema 9 Mostre que o conjunto das combinações lineares (finitas) de medidas de Dirac em Ω é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$ munido da topologia fraca.

Dicas: (i) $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$ (Teorema IV.3.3 de [2] ou Teorema 4.1.5 de [1]); somas de Riemann. (ii) Resultados de densidade deste tipo decorrem também do teorema de Hahn-Banach; veja, por exemplo, o Problema 36.3 de [4].

Problema 10 Mostre que $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{S}'$ com a topologia fraca.

2. Símbolos

Definição: Dados $m \in \mathbb{R}$, ρ e $\delta \in [0,1]$, $K \subset\subset \Omega$, α e $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, definimos:

$$p_{K,\alpha,\beta}^{m,\rho,\delta}(a) = \sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}}.$$

Normalmente omitiremos os superíndices e escreveremos $p_{K,\alpha,\beta}$ em vez de $p_{K,\alpha,\beta}^{m,\rho,\delta}$, deixando apenas implícitos os valores de m, ρ, e δ. Dados $M \in \mathbb{R}$, $K \subset\subset \Omega$, α e

$\beta \in \mathbb{N}^n$ e $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, definimos:

$$p^M_{K,\alpha,\beta}(a) \;=\; \sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^M}.$$

Problema 11 a) Mostre que $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N);\, p_{K,\alpha,\beta}(a) < \infty$, para todo $K \subset\subset \Omega$, e para todos α e $\beta \in \mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet com a topologia induzida pelas seminormas $p_{K,\alpha,\beta}$. *Dica*: $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ é de Fréchet.
b) Mostre que $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^N) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N);\, p^M_{K,\alpha,\beta}(a) < \infty$, para todo $M \in \mathbb{R}$, para todo $K \subset\subset \Omega$, e para todos α e $\beta \in \mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet com a topologia induzida pelas seminormas $p^M_{K,\alpha,\beta}$.
c) Mostre que $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^N) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, para quaisquer ρ e $\delta \in [0,1]$.
d) Mostre que são contínuas todas as inclusões obtidas da variação de m, ρ, e δ.
Problema 12 Mostre que a aplicação

$$(a,b) \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \times S^{m'}_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \longrightarrow a\cdot b \in S^{m+m'}_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$$

é contínua (faz parte do problema expressar a continuidade de uma aplicação bilinear entre espaços de Fréchet em termos das seminormas).
Problema 13 Mostre que a “convolução na segunda variável”

$$q(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} p(x,\xi-\eta)\chi(\eta)d\eta$$

define aplicação contínua $(p,\chi) \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \mapsto q \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.
Dica: $1+|x-y| \le (1+|x|)(1+|y|)$.
Problema 14 Mostre que, se $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ é tal que, para todo $K \subset\subset \Omega$, existe R tal que $a(x,\lambda\xi) = \lambda^m a(x,\xi)$ se $x \in K$, $\lambda > 1$ e $|\xi| > R$, então $a \in S^m_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.
Problema 15 Dado $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$. A que espaços de símbolos pertencem $a_1(\xi) = (|\xi'|^2 + i\xi_n)^{-1}$ e $a_2(\xi) = (|\xi'|^2+1)^{-1}$?
Problema 16 Mostre que $a(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) = (1+\xi_1^4+\xi_2^2)^{-1}$ pertence a $S^{-2}_{\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.
Problema 17 Mostre que, se tivéssemos definido $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ para $\rho > 1$, então teríamos $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \subset S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ para $\rho > 1$ e $m < 0$. *Dicas*: Aplique o operador $L = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ repetidas vezes e integre. Use coordenadas polares.

3. Pseudos

Problema 18 a) Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, mostre que o operador pseudodiferencial $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de amplitude (independente de y) $a(x,\xi)$ pode ser estendido a um operador linear contínuo $\tilde{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
b) Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, seja $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o operador pseudodiferencial de amplitude (independente de x) $a(y,\xi)$. Mostre que, para cada $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, Au pode ser estendida a um elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e que assim se obtém um operador linear contínuo $\tilde{A} : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
c) Defina extensões dos operadores $\tilde{A}$ dos itens "a" e "b" entre espaços de distribuições apropriados.

Definição: Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ é uma amplitude própria se, para todo $K \subset\subset \Omega$, existe $K' \subset\subset \Omega$ tal que, se $y \notin K'$ e $x \in K$ ou se $y \in K$ e $x \notin K'$, então $a(x,y,\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Problema 19 a) Mostre que, se a é uma amplitude própria e se $\chi_k \in \mathcal{S}$ é uma sequência tal que $|\chi_k(\xi)| \leq 1$, $\forall k$, $\forall \xi$, e $\lim_{k\to\infty} \chi_k(\xi) = 1$, $\forall \xi$, então o limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y) \chi_k(\xi)\, dy\, d\xi \tag{1}$$

existe, para todo $x \in \Omega$, e não depende da sequência escolhida.
b) Definindo $Au(x)$ como o limite em (1), o que se denota por

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \ \texttt{(osc)},$$

mostre que assim obtemos um operador linear contínuo $A : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
c) Justifique a mudança de variáveis na integral oscilatória na página 29 de [3].

Problema 20 a) Seja $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que exista sequência $m_j \in \mathbb{R}$, com $\lim_{j\to\infty}(m_j - j) = -\infty$, tal que $\sup_{(x,y,\xi)\in K\times\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{-m_j}|\partial^\alpha_x \partial^\beta_y a(x,y,\xi)|$ seja finito, para todo $K \subset\subset \Omega \times \Omega$ e para todos α e β com $|\alpha| + |\beta| \leq j$. Mostre que fórmula

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \ \texttt{(osc)}$$

define operador linear contínuo $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
b) Mostre que todo símbolo de Hörmander $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, com ρ e m arbitrários e $\delta < 1$, satisfaz a hipótese do item "a".

Problema 21 Dados $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, mostre que os operadores pseudodiferenciais induzidos pelas amplitudes $(y-x)^\alpha a(x,y,\xi)$ e $D^\alpha_\xi a(x,y,\xi)$ são iguais.

Problema 22 Dada $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mu(x) > 0\, \forall x$, defina, para u e $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, $(u,v)_\mu = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)\mu(x)dx$. Mostre que, dado $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, existe $A^\star \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ tal que $(Au,v)_\mu = (u,A^\star v)_\mu$, $\forall u$, $\forall v$. Ache uma expansão assintótica para o símbolo de $A^\star$ e mostre, em particular, que o símbolo principal de $A^\star$ é igual ao complexo conjugado do símbolo principal de A.

Definição: Dizemos que $a \in S^m_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ é um *símbolo clássico*, denotado $a \in S^m_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, se existem $a_j \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tais que $a_j(x,t\xi) = t^{m-j}a_j(t,\xi)$, para todo $t > 1$ e para todo $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ com $|\xi| > 1$, tais que $a \sim \sum_{j=0}^\infty a_j$. Se A possui símbolo em $S^m_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, dizemos que $A \in L^m_{cl}(\Omega)$.

Problema 23 Mostre que, se $A \in L^m_{cl}(\Omega)$ e $B \in L^{m'}_{cl}(\Omega)$, sendo um deles propriamente suportado, então $A^t \in L^m_{cl}(\Omega)$ e $AB \in L^{m+m'}_{cl}(\Omega)$.

Problema 24 Dados operador linear contínuo $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e difeomorfismo $\Phi : \Omega \to \Omega'$, seja $A' : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega') \to \mathcal{C}^\infty(\Omega')$ dado por $A'(u \circ \Phi) = (Au) \circ \Phi$. Sendo K_A e $K_{A'}$ os núcleos de Schwartz de A e A', mostre que $(1 \otimes |\det \Phi'|)K_A \circ (\Phi, \Phi) = K_{A'}$.

Definição: Uma densidade C^∞ em uma variedade M é a atribuição, a cada carta $\chi : U_\chi \to U'_\chi$, de uma função $\mu_\chi \in \mathcal{C}^\infty(U'_\chi)$, de forma que tenhamos $\mu_\chi \circ \chi \circ \omega^{-1}(x)|\det(\chi \circ \omega^{-1})'(x)| = \mu_\omega(x)$, para todo $x \in \chi(U_\chi \cap U_\omega)$. Dizemos que uma densidade μ é positiva se μ_χ é positiva para toda carta χ.

Problema 25 a) Dados densidade C^∞ positiva μ em M, função contínua de suporte compacto $\varphi \in \mathcal{C}_c(M)$, atlas $\mathcal{F}$ consistindo de cartas com domínios de fecho compacto, e partição da unidade $\{\psi_\chi;\, \chi \in \mathcal{F}\}$, com $\psi_\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(U_\chi) \forall \chi$, mostre que

$$\sum_{\chi \in \mathcal{F}} \int_{U'_\chi} (\varphi\psi_\chi) \circ \chi^{-1}(x)\mu_\chi(x)dx \tag{2}$$

depende só de φ e de μ, mas não de $\mathcal{F}$ ou da partição da unidade.

b) Definindo $\int \varphi d\mu$ como a soma em (2), mostre que, se $\varphi \in \mathcal{C}_c(U_\chi)$, então

$$\int \varphi d\mu = \int_{U'_\chi} \varphi \circ \chi^{-1}(x)\mu_\chi(x)dx.$$

Problema 26 Mostre que existem Ω_1 e Ω_2, abertos disjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$, tais que, com $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, existe operador linear contínuo $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal

que a restrição $A_i : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_i) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$ a cada Ω_i seja nula, mas que $A \notin L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.
Dica: É mais fácil supor $\rho > 0$. Será necessário?

Definição: Dada carta $\omega : U_\omega \to U'_\omega$, da variedade n-dimensional M, denotamos por χ_ω a trivialização local do fibrado cotangente por ela induzida, $\chi_\omega : T^\star U_\omega \to U'_\omega \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que $a \in \mathcal{C}^\infty(T^\star M)$ pertence a $S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ se $a \circ \chi_\omega^{-1} \in S^m_{\rho,\delta}(U'_\omega \times \mathbb{R}^n)$, para toda carta ω. Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é um símbolo principal para $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ se $a \circ \chi_\omega^{-1}$ é símbolo principal para A_ω para toda carta ω. Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é elíptico se $a \circ \chi_\omega^{-1}$ é elíptico, para toda carta ω.

Problema 27 Mostre que, se $a \in \mathcal{C}^\infty(T^\star M)$ é tal que $a \circ \chi_\omega^{-1} \in S^m_{\rho,\delta}(U'_\omega \times \mathbb{R}^n)$ para toda carta ω *de um atlas*, então $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$.

Problema 28 Mostre que, se $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ e $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ são tais que $a \circ \chi_\omega^{-1}$ é símbolo principal para A_ω para toda carta ω *de um atlas*, então a é símbolo principal para A.

Problema 29 a) Sendo $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ um símbolo principal de $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ e $A_U \in L^m_{\rho,\delta}(U)$ a restrição $A_U v = (Av)|_U$, $v \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, de A a um aberto $U \subset \Omega$, mostre que $a|_{U\times\mathbb{R}^n}$ é símbolo principal de A_U.
b) Como acima, seja $U \subset \Omega$ aberto. Mostre que, se $a \in S^m_{\rho,\delta}(U \times \mathbb{R}^n)$ é símbolo principal de $A \in L^m_{\rho,\delta}(U)$ e se φ e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se anulam em vizinhança do pedaço da fronteira de U contido em Ω, então a extensão nula de $\varphi(x)\psi(x)a(x,\xi)$ a $\Omega\times\mathbb{R}^n$ é um símbolo principal de $\varphi A \psi$, naturalmente interpretado como elemento de $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Problema 30 Mostre que, se $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é tal que $a \circ \chi_\omega^{-1}$ é elíptico para toda carta ω *de um atlas*, então a é elíptico.

Problema 31 Mostre que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é elíptico se somente se existe $b \in S^{-m}_{\rho,\delta}(T^\star M)$, tal que $(1 - ab) \in S^{-\infty}(T^\star M)$.

Problema 32 Mostre que $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ tem um símbolo principal elíptico se e somente se, para toda carta ω de M, e para todas u e $v \in \mathcal{C}_c^\infty(U_\omega)$, $(uAv)_\omega$ restrito ao aberto $\omega(\{uv \neq 0\})$ é elíptico.

References

[1] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 1983.

[2] Jorge Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 1979.

[3] Jorge Hounie, *Introdução aos Operadores Pseudodiferenciais*, 1987.

[4] François Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*.