MAT 2116 - Álgebra Linear para Química

Turma 13 - Primeira Prova - 22 de abril de 2003

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Questão 1 (2 pontos) Decida se são, ou não, inversíveis as matrizes abaixo; calculando a inversa em caso afirmativo.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 2 (2 pontos) (a) Dada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existam matrizes 2×1 não-nulas $\mathbf{x}$ satisfazendo $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

(b)Encontre pelo menos uma solução $\mathbf{x}$ não-nula da equação $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, para cada valor de λ encontrado no item "a".

Questão 3) (2 pontos) Encontre, usando o método ou argumento de sua preferência, e justificando cada passo, o determinante de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 10^{19} \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Questão 4) (2 pontos) (a) Dados $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

(b) Desenhe, em uma mesma figura, os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

(c) Quanto vale o cosseno do ângulo formado por uma aresta e uma diagonal de um cubo?

Questão 5) (3 pontos) (a) Dados reais x_1, x_2 e x_3, prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

(b) Mostre que as constantes a, b e c são tais que dados pontos (x_1, y_1) (x_2, y_2) e (x_3, y_3) pertencem à curva de equação $y = ax^2 + bx + c$ se, e somente se, resolvem um sistema linear. Dê a matriz dos coeficientes desse sistema e prove que ele terá solução se, e somente se, $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$. Será única, neste caso, a solução? Por quê?

(c) São dados pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Mostre que existem únicas constantes a, b, c e d, tais que os quatro pontos dados pertençam à curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

MAT 2116 - Álgebra Linear para Química

Turma 13 - Primeira Prova - 22 de abril de 2003

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Questão 1 (2 pontos) Decida se são, ou não, inversíveis as matrizes abaixo; calculando a inversa em caso afirmativo.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 2 (2 pontos) (a) Dada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existam matrizes 2×1 não-nulas $\mathbf{x}$ satisfazendo $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

(b)Encontre pelo menos uma solução $\mathbf{x}$ não-nula da equação $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, para cada valor de λ encontrado no item "a".

Questão 3) (2 pontos) Encontre, usando o método ou argumento de sua preferência, e justificando cada passo, o determinante de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 10^{22} \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Questão 4) (2 pontos) (a) Dados $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (0,0,1)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

(b) Desenhe, em uma mesma figura, os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

(c) Quanto vale o cosseno do ângulo formado por uma aresta e uma diagonal de um cubo?

Questão 5) (3 pontos) (a) Dados reais x_1, x_2 e x_3, prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

(b) Mostre que as constantes a, b e c são tais que dados pontos (x_1, y_1) (x_2, y_2) e (x_3, y_3) pertencem à curva de equação $y = ax^2 + bx + c$ se, e somente se, resolvem um sistema linear. Dê a matriz dos coeficientes desse sistema e prove que ele terá solução se, e somente se, $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$. Será única, neste caso, a solução? Por quê?

(c) São dados pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4), com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Mostre que existem únicas constantes a, b, c e d, tais que os quatro pontos dados pertençam à curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.