MAT 5860 (Operadores Pseudodiferenciais) - $2^{°}$ Semestre de 2003

1. Preliminares

Ω denota um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário. $K \subset\subset A$ significa que K é compacto contido no interior de A. $\mathbb{N}$ inclui o zero. Dados α e β em $\mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, e, se $\beta \leq \alpha$ (i.e., se $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, \cdots, n$), $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Definição: Uma aplicação entre espaços topológicos é própria se a imagem inversa de compactos é compacta. Diremos que um fechado (relativo) F de $\Omega \times \Omega$ é próprio se as restrições a F das projeções $\pi_1(x,y) = x$ e $\pi_2(x,y) = y$ forem próprias.

Problema 1 Mostre que um fechado $F \subset \Omega \times \Omega$ é próprio se, e somente se, para todo $K \subset\subset \Omega$, existe $K' \subset\subset \Omega$ tal que, se $y \notin K'$ e $x \in K$, ou se $y \in K$ e $x \notin K'$, então $(x,y) \notin F$.

Problema 2 Dado U aberto contendo a diagonal $\{(x,x);\, x \in \Omega\}$, mostre que existe $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$ com suporte próprio contido em U e valendo 1 em uma vizinhança da diagonal.

Problema 3 Dado um fechado próprio $F \subset \Omega \times \Omega$ contendo a diagonal, mostre que existe $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$ de suporte próprio e igual a 1 numa vizinhança de F.

Problema 4 Seja $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ tal que, para todo $K \subset\subset \Omega$, existam constantes positivas C e ρ tais que $|a(x,\xi)| > C(1+|\xi|)^m$ se $x \in K$ e $|\xi| > \rho$. Mostre que existem funções positivas C e ρ pertencentes a $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tais que $|a(x,\xi)| > C(x)(1+|\xi|)^m$ se $x \in \Omega$ e $|\xi| > \rho(x)$.

Definição: O *símbolo* do operador $Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$, onde $D^\alpha u(x) = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ e $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, é a função $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

Problema 5 Mostre que, se P e Q são operadores diferenciais parciais lineares em Ω, de símbolos p e q, respectivamente, então o símbolo da composta $Ru = P(Qu)$ é $r(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{\partial_\xi^\alpha p(x,\xi) \partial_x^\alpha q(x,\xi)}{i^{|\alpha|} \alpha!}$. *Dica*: $D^\alpha(uv) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$.

Problema 6 Seja X um espaço de Fréchet com as semi-normas p_k, $k \in \mathbb{N}$.

a) Sejam $x_j \in X$ tais que $\sum_{j=0}^{\infty} p_k(x_j)$ seja finita para todo k. Mostre que existe o limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} x_j$, e que independe da ordem dos termos.

b) Mostre que, dados $x_j \in X$ arbitrários, $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} x_j / [1 + p_1(x_j) + \cdots + p_j(x_j)]$ converge.

Problema 7 Dados abertos $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ e dado operador linear contínuo A de $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ em si próprio, mostre que $A^{\otimes} f(x,y) = [Af(\cdot,y)](x)$ define operador linear contínuo de $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ em si próprio, valendo a igualdade $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta A^{\otimes} f(x,y) = [A\partial_y^\beta f(\cdot,y)]^{(\alpha)}(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e para todo $\beta \in \mathbb{N}^m$.

Problema 8 Denotemos por $\mathcal{X}$ o espaço das funções pertencentes a $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tais que, para todo $K \subset\subset \Omega$ e para todos α, β, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, tenhamos o supremo $\sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma f(x,\xi)|$ finito.

a) Dado $A : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, mostre que $A^{\otimes}$ leva $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$.

b) Mostre que, se $f \in \mathcal{X}$, os dois lados da igualdade abaixo fazem sentido e a igualdade se verifica:

$$A\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,\xi)đ\xi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} Af(\cdot,\xi)đ\xi.$$

Dica: Considere somas de Riemann sobre retângulos com vértices em $h\mathbb{Z}^n$, $h \to 0$.

Problema 9 Preencha os detalhes, dando referências precisas para os resultados que usar, da demonstração do Teorema 5.2.6 de [3].

Problema 10 Prove que, dada qualquer seqüência $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $a_\alpha = u^{(\alpha)}(0)/\alpha!$. *Dica*: Este é um teorema de Borel. Demonstre-o seguindo os passos do Exercício 1.7 de [1].

Problema 11 Dados operador linear contínuo $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e difeomorfismo $\Phi : \Omega \to \Omega'$, seja $A' : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega') \to \mathcal{C}^\infty(\Omega')$ dado por $A'(u \circ \Phi) = (Au) \circ \Phi$. Sendo K_A e $K_{A'}$ os núcleos de Schwartz de A e A', mostre que $(1 \otimes |\det \Phi'|)K_A \circ (\Phi,\Phi) = K_{A'}$.

Problema 38 (Definições e notação da Seção V.3 de [3]) Mostre que, se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ e se existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que, para todo $K \subset\subset \Omega$, existe $C > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq Cg(y)$, para quase todo $(x,y) \in K \times \mathbb{R}^n$, então $f \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ e a transformada de Fourier parcial de f, $\tilde{f}$, é contínua e dada por $\tilde{f}(x,\xi) = \int e^{-i\xi\cdot y} f(x,y)đy$.

Problema 39 Mostre que o operador da Definição V.3.3 de [3] é o único operador linear contínuo de $\mathcal{D}'(\Omega;\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ em si próprio que estende a transformada de Fourier parcial, a princípio definida em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega;\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$.

2. Símbolos

Definição: Dados $m \in \mathbb{R}$, ρ e $\delta \in [0,1]$, $K \subset\subset \Omega$, α e $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, definimos:

$$p^{m,\rho,\delta}_{K,\alpha,\beta}(a) = \sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}}.$$

Normalmente omitiremos os superíndices e escreveremos $p_{K,\alpha,\beta}$ em vez de $p^{m,\rho,\delta}_{K,\alpha,\beta}$, deixando apenas implícitos os valores de m, ρ, e δ. Dados $M \in \mathbb{R}$, $K \subset\subset \Omega$, α e $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, definimos:

$$p^{M}_{K,\alpha,\beta}(a) = \sup_{(x,\xi)\in K\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^{M}}.$$

Problema 12 a) Mostre que $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N);\ p_{K,\alpha,\beta}(a) < \infty,$ para todo $K \subset\subset \Omega$, e para todos α e $\beta \in \mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet com a topologia induzida pelas seminormas $p_{K,\alpha,\beta}$. *Dica*: $\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ é de Fréchet.
b) Mostre que $S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^N) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N);\ p^M_{K,\alpha,\beta}(a) < \infty,$ para todo $M \in \mathbb{R}$, para todo $K \subset\subset \Omega$, e para todos α e $\beta \in \mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet com a topologia induzida pelas seminormas $p^M_{K,\alpha,\beta}$.
c) Mostre que $S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^N) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$, para quaisquer ρ e $\delta \in [0,1]$.
d) Mostre que são contínuas todas as inclusões obtidas da variação de m, ρ, e δ.

Problema 13 a) Mostre que a aplicação

$$(a,b) \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N) \times S^{m'}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N) \longrightarrow a\cdot b \in S^{m+m'}_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$$

é contínua (faz parte do problema expressar a continuidade de uma aplicação bilinear entre espaços de Fréchet em termos das seminormas).
b) Dados multiíndices α e β, enuncie e demonstre afirmação análoga para o operador $a \mapsto a^{(\beta)}_{(\alpha)}$, sendo $a^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)$.

Problema 14 Dado $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $\xi' = (\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$. A que espaços de símbolos pertencem $a_1(\xi) = (|\xi'|^2 + i\xi_n)^{-1}$ e $a_2(\xi) = (|\xi'|^2+1)^{-1}$?

Problema 15 Mostre que $a(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) = (1+\xi_1^4+\xi_2^2)^{-1}$ pertence a $S^{-2}_{\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, mas não a $S^{-2}_{1,0}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$).

Problema 16 Mostre que, se tivéssemos definido $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ para $\rho > 1$, então teríamos $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N) \subset S^{-\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ para $\rho > 1$ e $m < 0$. Que acontece se $m \geq 0$ e $\delta < 0$? *Dicas*: Aplique o operador $L = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}$ repetidas vezes e integre. Use coordenadas polares.

Problema 17 Mostre que a "convolução na segunda variável"

$$q(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} p(x,\xi-\eta)\chi(\eta)d\eta$$

define aplicação contínua $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\ni(p,\chi)\mapsto q\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$.

Dica: $1+|x-y|\le(1+|x|)(1+|y|)$.

Definição: Diremos que $a\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ é um *símbolo clássico* de ordem $m\in\mathbb{Z}$, e isso será denotado por $a\in S^m_{cl}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$, se existirem $a_j\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\{\xi\in\mathbb{R}^N;\,\xi\neq 0\})$ satisfazendo:

(1) $a_j(x,\lambda\xi)=\lambda^{m-j}a_j(x,\xi)$, para $\lambda>0$, $x\in\Omega$ e $\xi\neq 0$.

(2) Para todos $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\beta\in\mathbb{N}^N$ e $K\subset\subset\Omega$, existe $C>0$ tal que

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(a-\sum_{j=0}^{k}a_j)(x,\xi)|\le C(1+|\xi|)^{m-k-1-|\beta|},\ \text{se } x\in K \text{ e } |\xi|\ge 1.$$

Problema 18 Mostre que $a\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ pertence $S^m_{cl}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, existirem $a_j\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:

(1) $a_j(x,\lambda\xi)=\lambda^{m-j}a_j(x,\xi)$, sempre que $\lambda>0$, $x\in\Omega$ e $|\xi|\ge 1$.

(2) Para todo $k\in\mathbb{N}$, $a-\sum_{j=0}^k a_j$ pertence a $S^{m-k-1}_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$.

Problema 19 Seja $\lambda(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\frac12}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

a) Mostre que $s_j(x,\xi)=\xi_j\lambda(\xi)$ pertence a $S^0_{cl}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $j=1,\cdots,n$.

b) Mostre que, para cada $m\in\mathbb{Z}$, $a(x,\xi)=\lambda(\xi)^{-m}$ pertence a $S^m_{cl}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$.

Problema 20 Mostre que $S^m_{cl}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ está estritamente contido em $S^m_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$, para todo $m\in\mathbb{Z}$.

3. Pseudos

Problema 21 a) Seja $a\in\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$ tal que exista sequência $m_j\in\mathbb{R}$, com $\lim_{j\to\infty}(m_j-j)=-\infty$, tal que $\sup_{(x,y,\xi)\in K\times\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{-m_j}|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta a(x,y,\xi)|$ seja finito, para todo $K\subset\subset\Omega\times\Omega$ e para todos α e β com $|\alpha|+|\beta|\le j$. Mostre que fórmula

$$Au(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi\ \texttt{(osc)}$$

define operador linear contínuo $A:\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)\to\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

b) Mostre que todo símbolo de Hörmander $a\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$, com ρ e m arbitrários e $\delta<1$, satisfaz a hipótese do item "a".

Problema 22 Dê exemplo de um operador pseudodiferencial com símbolo em $S^0_{0,0}(\mathbb{R})$ cujo núcleo de Schwartz possua suporte singular não-contido na diagonal.

Problema 23 Dados $\delta < 1$, $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, mostre que os operadores pseudodiferenciais induzidos pelas amplitudes $(y-x)^\alpha a(x,y,\xi)$ e $D^\alpha_\xi a(x,y,\xi)$ são iguais.

Problema 24 Seja $\delta < 1$.

a) Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, mostre que o operador pseudodiferencial $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de amplitude (independente de y) $a(x,\xi)$ pode ser estendido a um operador linear contínuo $\tilde{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

b) Dado $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, seja $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o operador pseudodiferencial de amplitude (independente de x) $a(y,\xi)$. Mostre que, para cada $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, Au pode ser estendida a um elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e que assim se obtém um operador linear contínuo $\tilde{A} : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) Defina extensões dos operadores $\tilde{A}$ dos itens "a" e "b" entre espaços de distribuições apropriados.

Definição: Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ é uma amplitude própria se, para todo $K \subset\subset \Omega$, existe $K' \subset\subset \Omega$ tal que, se $y \notin K'$ e $x \in K$, ou se $y \in K$ e $x \notin K'$, então $a(x,y,\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Problema 25 Mostre que um operador pseudodiferencial $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ possui uma amplitude própria se, e somente se, seu núcleo de Schwartz tem suporte próprio.

Problema 26 Sejam $\delta < 1$ e a uma amplitude própria.

a) Mostre que, se $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, e se $\chi_k \in \mathcal{S}$ é uma seqüência tal que $|\chi_k(\xi)| \leq 1$, $\forall k$, $\forall \xi$, e $\lim_{k\to\infty} \chi_k(\xi) = 1$, $\forall \xi$, então o limite

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y) \chi_k(\xi) dy d\xi$$

existe, para todo $x \in \Omega$, e não depende da seqüência escolhida.

b) Definindo-se $Au(x)$ como o limite em (1), mostre que assim se obtém um operador linear contínuo $A : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

c) Prove que A aplica $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ em $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, e que $A : \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ também será contínuo se o contradomínio for munido da topologia do limite indutivo.

Problema 37 Dados $\delta < 1$, $\rho > 0$, $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ propriamente suportado e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, mostre que o suporte singular de Au está contido no de u.

Definição: Dados operador $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e aberto $U \subset \Omega$, a *restrição* de A a U é o operador $A_U : \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ que aplica $u \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ na restrição a Ω de A aplicado à extensão de u a Ω que é nula no complementar de U.

Problema 27 Mostre que existem Ω_1 e Ω_2, abertos disjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$, e operador linear contínuo $A : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, tal que a restrição de A a cada Ω_i seja nula, mas que $A \notin L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ se $\rho > 0$. Mostre que é possível termos ambas as restrições nulas para um $A \in L^0_{0,0}(\Omega)$ não-nulo.

Problema 28 a) Dados $\delta < \rho$, $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, um símbolo principal a de A, e U um aberto de Ω, mostre que $a|_{U\times\mathbb{R}^n}$ é um símbolo principal da restrição de A a U.

b) Como acima, seja $U \subset \Omega$ aberto. Mostre que, se $a \in S^m_{\rho,\delta}(U \times \mathbb{R}^n)$ é símbolo principal de $A \in L^m_{\rho,\delta}(U)$ e se φ e $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se anulam em vizinhança do pedaço da fronteira de U contido em Ω, então a extensão nula de $\varphi(x)\psi(x)a(x,\xi)$ a $\Omega\times\mathbb{R}^n$ é um símbolo principal de $\varphi A\psi$, naturalmente interpretado como elemento de $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Problema 29 Dada $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mu(x) > 0\,\forall x$, defina, para u e $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $(u,v)_\mu = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)\mu(x)dx$. Mostre que, dado $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, existe $A^\star \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ tal que $(Au,v)_\mu = (u, A^\star v)_\mu$, $\forall u,v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Ache uma expansão assintótica para o símbolo de $A^\star$ e mostre, em particular, que o símbolo principal de $A^\star$ é igual ao complexo conjugado do símbolo principal de A.

Definição: Se $A \in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ possui símbolo em $S^m_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, dizemos que $A \in L^m_{cl}(\Omega)$.

Problema 30 Mostre que, se $A \in L^m_{cl}(\Omega)$ e $B \in L^{m'}_{cl}(\Omega)$, sendo um deles propriamente suportado, então $A^t \in L^m_{cl}(\Omega)$ e $AB \in L^{m+m'}_{cl}(\Omega)$.

4. Variedades

Definição: Uma densidade C^∞ em uma variedade M é a atribuição, a cada carta $\chi : U_\chi \to U'_\chi$, de uma função $\mu_\chi \in \mathcal{C}^\infty(U'_\chi)$, de forma que tenhamos $\mu_\chi \circ \chi \circ \omega^{-1}(x)|\det(\chi\circ\omega^{-1})'(x)| = \mu_\omega(x)$, para todo $x \in \chi(U_\chi \cap U_\omega)$. Dizemos que uma densidade μ é positiva se μ_χ é positiva para toda carta χ.

Problema 31 a) Dados densidade C^∞ positiva μ em M, função contínua de suporte compacto $\varphi \in \mathcal{C}_c(M)$, atlas $\mathcal{F}$ consistindo de cartas $\chi : U_\chi \to U'_\chi$ com domínios de fecho compacto, e partição da unidade $\{\psi_\chi;\, \chi \in \mathcal{F}\}$, com $\psi_\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(U_\chi) \forall \chi \in \mathcal{F}$, mostre que

$$\sum_{\chi\in\mathcal{F}} \int_{U'_\chi} (\varphi\psi_\chi)\circ\chi^{-1}(x)\mu_\chi(x)dx \tag{2}$$

depende só de φ e de μ, mas não de $\mathcal{F}$ ou da partição da unidade.

b) Definindo $\int \varphi d\mu$ como a soma em (2), mostre que, se $\varphi \in \mathcal{C}_c(U_\chi)$, então

$$\int \varphi d\mu = \int_{U'_\chi} \varphi\circ\chi^{-1}(x)\mu_\chi(x)dx.$$

Definição: Dada carta $\omega : U_\omega \to U'_\omega$, da variedade n-dimensional M, denotamos por χ_ω a trivialização local do fibrado cotangente por ela induzida, $\chi_\omega : T^\star U_\omega \to U'_\omega \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que $a \in \mathcal{C}^\infty(T^\star M)$ pertence a $S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ se $a\circ\chi_\omega^{-1} \in S^m_{\rho,\delta}(U'_\omega \times \mathbb{R}^n)$, para toda carta ω. Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é um símbolo principal para $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ se $a\circ\chi_\omega^{-1}$ é símbolo principal para A_ω para toda carta ω. Dizemos que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é elíptico se $a\circ\chi_\omega^{-1}$ é elíptico, para toda carta ω.

Problema 32 Mostre que, se $a \in \mathcal{C}^\infty(T^\star M)$ é tal que $a\circ\chi_\omega^{-1} \in S^m_{\rho,\delta}(U'_\omega \times \mathbb{R}^n)$ para toda carta ω *de um atlas*, então $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$.

Problema 33 Mostre que, se $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ e $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ são tais que $a\circ\chi_\omega^{-1}$ é símbolo principal para A_ω para toda carta ω *de um atlas*, então a é símbolo principal para A.

Problema 34 Mostre que, se $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é tal que $a\circ\chi_\omega^{-1}$ é elíptico para toda carta ω *de um atlas*, então a é elíptico.

Problema 35 Mostre que $a \in S^m_{\rho,\delta}(T^\star M)$ é elíptico se, e somente se, existe $b \in S^{-m}_{\rho,\delta}(T^\star M)$, tal que $(1 - ab) \in S^{-\infty}(T^\star M)$.

Problema 36 Mostre que $A \in L^m_{\rho,\delta}(M)$ tem um símbolo principal elíptico se e somente se, para toda carta ω de M, e para todas u e $v \in \mathcal{C}^\infty_c(U_\omega)$, $(uAv)_\omega$ restrito ao aberto $\omega(\{uv \neq 0\})$ é elíptico.

Referências

[1] Alain Grigis & Johannes Sjöstrand, Microlocal Analysis for Differential Operators - An Introduction, Cambridge University Press, 1994

[2] Lars Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer Verlag, 1983.

[3] Jorge Hounie, Teoria Elementar das Distribuições, IMPA, 1979.