Integração em Variedades

<u>Definição</u>: Um atlas C^∞ (de dimensão n) em um espaço topológico M é uma família de homeomorfismos $x_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$, $\alpha \in I$, onde cada U_α é um aberto de M e cada $\tilde{U}_\alpha$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que

(1) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$

(2) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um difeomorfismo C^∞.

<u>Obs</u>: Todo atlas está contido em um único "atlas maximal", i.e., um atlas tal que se $x : U \to \tilde{U}$ é um homeomorfismo de um aberto de M em um aberto de $\mathbb{R}^n$, e se $x \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U) \to x(U_\alpha \cap U)$ é um difeo $\forall\, x_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$ no atlas, então x pertence ao atlas.

<u>Definição</u>: Uma variedade C^∞ de dimensão n é um espaço de Hausdorff M, satisfazendo o 2º axioma de enumerabilidade (i.e., existe uma família enumerável de abertos $\mathcal{B}$ tal que

todo aberto de M é união de elementos de $\mathcal{B}$), munido de um atlas maximal C^∞ de dimensão n. Os elementos do atlas são chamados "cartas".

<u>Teorema 1</u>: Toda variedade de dimensão finita é união enumerável de compactos.

<u>Definição</u>: $f: M \to \mathbb{R}$ é C^∞ se $f \circ x^{-1}$ é C^∞ $\forall$ carta x ($\iff$ $\forall$ carta em um atlas)

<u>Teorema 2</u>: Dada uma cobertura $\{U_\alpha ; \alpha \in I\}$ por abertos de M, existe uma família de funções C^∞ $\{\varphi_\beta : M \to \mathbb{R} ; \beta \in J\}$ tal que

(1) $\operatorname{supp} \varphi_\beta$ é cpt $\forall \beta \in I$

(2) $\forall x \in M$ $\exists$ aberto $W \ni x$ tq $\{\beta \in J ; \operatorname{supp} \varphi_\beta \cap W \neq \phi\}$ é finito

(3) $0 \leq \varphi_\beta(x) \leq 1$ $\forall x \in M$ $\forall \beta \in J$

(4) $\displaystyle\sum_{\beta \in J} \varphi_\beta(x) = 1$ $\forall x \in M$

(5) $\forall \beta \in J$ $\exists \alpha \in I$ tq $\operatorname{supp} \varphi_\beta \subseteq U_\alpha$.

<u>Obs</u>: Se $\overline{U_\alpha}$ é cpt $\forall \alpha$, pode-se tomar $J = I$, $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$ $\forall \alpha$.

<u>Definição</u>: Uma densidade C^∞ em uma variedade M é uma família de funções $\{u_x : \tilde{U}_x \to \mathbb{C};\ x : U_x \to \tilde{U}_x \text{ é carta}\}$ tq, se $U_x \cap U_w \neq \emptyset$, x e w cartas então

$$\text{(A)}\quad u_{x'}\Big|_{x(U_x \cap U_w)} = \left(u_x\Big|_{x(U_x \cap U_w)} \circ \psi\right) \cdot |\det \psi'|$$

onde $\psi = x \circ w^{-1} : w(U_x \cap U_w) \to x(U_x \cap U_w)$.

<u>Obs</u>: Segue de (A) que faz sentido falar em uma densidade ser real, positiva, não-negativa, nula em um ponto, etc.

<u>Prop 1</u>: Seja $\mathcal{F}$ um atlas e sejam $u_x : \tilde{U}_x \to \mathbb{C}$ funções C^∞, definidas para todo $(x : U_x \to \tilde{U}_x) \in \mathcal{F}$, tq que vale (A) $\forall\ x, x' \in \mathcal{F}$. Então existe uma única densidade C^∞ que estende a família dada.

<u>Dem</u>: Seja $\{\varphi_\alpha;\ \alpha \in I\}$ p.d.u (como no Teo 2) subordinada à cobertura $\{U_x;\ x \in \mathcal{F}\}$. Para cada carta w, defina ($\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_{x_\alpha}$)

$$u_w(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(w^{-1}(x)) \cdot (u_{x_\alpha} \circ x_\alpha \circ w^{-1})(x)\, |\det (x_\alpha \circ w^{-1})'(x)|$$

$\square$

<u>Prop 2</u>: Seja $u \in C^\infty$ tq $\operatorname{supp} u \subset U_\lambda$, onde U_λ é o domínio de uma carta $\lambda : U_\lambda \to \tilde{U}_\lambda$. Para cada carta $x : U_x \to \tilde{U}_x$, defina $u_x : \tilde{U}_x \to \mathbb{C}$ por

$$u_x(x) = \begin{cases} u(x^{-1}(x)) \cdot |\det(\lambda \circ x^{-1})'(x)|, & \text{se } x \in x(U_x \cap U_\lambda) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então $\{u_x ; x \text{ é carta}\}$ é uma densidade C^∞.

<u>Prop 3</u>: $\varphi \in C_c(M)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x \cap U_\omega \Rightarrow$

$$\int_{x(U_x \cap U_{x'})} (\varphi \circ x^{-1})\, u_x \, dm =$$

$$\int_{\omega(U_x \cap U_x')} (\varphi \circ \omega^{-1})\, u_\omega \, dm.$$

Sejam $\mathcal{F}$ um atlas, $u = \{u_x\}_{x \in \mathcal{F}}$ uma densidade, sejam $\{\varphi_\alpha\}$ e $\{\psi_\beta\}$ p.d.u's subordinadas a $\mathcal{F}$. Dada $f \in C_c(M)$, temos

$S = \text{supp}$

$$\sum_{\{\alpha \in I;\ S(\chi_\alpha) \cap S(f) \neq \emptyset\}} \int_{\tilde{U}_\alpha} (f\varphi_\alpha) \circ x_\alpha^{-1}\, \mu_{x_\alpha}\, dm$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta (f\varphi_\alpha \psi_\beta) \circ x_\alpha^{-1}\, \mu_{x_\alpha}\, dm$$

$$= \sum_\beta \sum_\alpha (f\varphi_\alpha \psi_\beta) \circ x_\beta^{-1}\, \mu_{x_\beta}\, dm$$

$$= \sum_\beta \int_{\tilde{U}_\beta} (f\psi_\beta) \circ x_\beta^{-1}\, \mu_{x_\beta}\, dm .$$

Isto define $\int_M f\mu \quad \forall\ f \in C_c(M)$

Se μ é densidade não-negativa,

$$\Lambda : C_c(M) \to \mathbb{C}, \quad \Lambda f = \int_M f\mu$$

é f.l. positivo e define uma medida em M.

Para cada $x \in \mathcal{F}$, seja $g_x \in C^\infty(\tilde{U}_x, M_n(\mathbb{R}))$ a expressão local de uma métrica riemanniana em M e seja $\mu_x = \sqrt{\det g_x}$.

Então $\{\mu_x\}$ é uma densidade positiva. A medida induzida por ela é a chamada "medida de superfície"

--