MAT 5860 (Operadores Pseudodiferenciais) - 1° Semestre de 2000

Ω denota um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário.

$K \subset\subset A$ significa que K é compacto contido no interior de A.

$\mathbb{N}$ inclui o zero. Dados α e β em $\mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$.

1. Espaços Localmente Convexos [3, 4, 5]

Dado um espaço vetorial complexo X, $p : X \to \mathbb{R}$ é seminorma se $(i)\, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$; e $(ii)\, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, x, $y \in X$. Daí, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$. A topologia induzida em X por uma família de seminormas $\mathcal{F}$ é a topologia menos fina que torna contínuas todas as aplicações $x \mapsto p(x - x_0)$, $p \in \mathcal{F}$, $x_0 \in X$. Um espaço localmente convexo é, por definição, um espaço vetorial munido da topologia induzida por uma família de seminormas. Um sistema de vizinhanças para $x_0 \in X$ é então dado por

$$\{\{x \in X;\, p(x - x_0) < \epsilon, \forall p \in F\};\ \epsilon > 0, F \subseteq \mathcal{F} \text{ finito}\}$$

Daí, $+ : X \times X \to X$ e $\cdot : \mathbb{C} \times X \to \mathrm{X}$ são contínuas. Uma sequência (x_j) em X converge a x se, e somente se, $p(x - x_j)$ converge a zero para toda $p \in \mathcal{F}$; e analogamente para redes. Esta topologia será de Hausdorff se, e somente se, $p(x) = 0$ para toda $p \in \mathcal{F}$ implicar que $x = 0$. Qualquer topologia de Hausdorff em um espaço vetorial, em relação à qual as operações algébricas sejam contínuas, e tal que exista, no zero, um sistema de vizinhanças convexas e *equilibradas* (isto é, invariantes por multiplicação por escalares de módulo unitário) é obtida assim (Teorema V.1 de [4], combinado a Teorema 1.15 de [5]).

Se X e Y são espaços localmente convexos, com topologias respectivamente induzidas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, então uma aplicação linear $T : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para toda $q \in \mathcal{G}$, existem $p_1, \cdots, p_n$ em $\mathcal{F}$ e $C > 0$ tais que $q(Tx) \leq C[p_1(x) + \cdots + p_n(x)]$, $\forall x \in X$. Em particular, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ induzem a mesma topologia em X se, e somente se, para toda $p' \in \mathcal{F}'$, existem $p_1, \cdots, p_n$ em $\mathcal{F}$ e $C > 0$ tais que $p'(x) \leq C[p_1(x) + \cdots + p_n(x)]$, $\forall x \in X$; e reciprocamente.

Seja $\mathcal{F}$ enumerável, $\mathcal{F} = \{p_k;\, k \in \mathbb{N}\}$. Então $d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}$ é uma métrica que induz em X a mesma topologia que $\mathcal{F}$. Uma sequência (x_j) em X é de Cauchy se, e somente se,

$$\forall \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } p_k(x_j - x_l) < \epsilon \text{ se } j \text{ e } l \geq j_0.$$

Se, como espaço métrico, X é completo, diz-se então que X é um *espaço de Fréchet*.

Exemplo 0: Se $||\cdot||$ é uma norma em X, a topologia induzida por $\mathcal{F}=\{||\cdot||\}$ é a topologia usual de espaço normado. A topologia induzida por $\{p_k(x)=|x_k|;\ k=1,\cdots,n\}$ em $\mathbb{C}^n$ é a euclideana.

Exemplo 1: Dados $K\subset\subset\Omega$ e $\alpha\in\mathbb{N}^n$, então $p_{K,\alpha}(\varphi)=\sup_{x\in K}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|$ define seminorma em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Escolhendo compactos K_k tais que $K_k\subset\subset K_{k+1}$ e $\Omega=\bigcup_k K_k$, então a família de seminormas $p_k(\varphi)=\sup\{|\partial_x^\alpha\varphi(x)|;\ |\alpha|\leq k,\ x\in K_k\}$ induz em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a mesma topologia que a família $\{p_{K,\alpha}\}$, tornando-o um espaço de Fréchet. Uma sequência f_j converge a f nesse espaço se, e somente se, $f_j^{(\alpha)}|_K$ converge uniformemente a $f^{(\alpha)}|_K$, para todo $K\subset\subset\Omega$ e para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$. Com esta topologia, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$; em particular, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ não é completo se munido da topologia relativa.

Exemplo 2: Dados α e $\beta\in\mathbb{N}^n$ e $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup\{|x^\alpha\partial_x^\beta\varphi(x)|;\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Então $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\{\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n);\ p_{\alpha,\beta}(\varphi)<\infty$, para todos α e $\beta\in\mathbb{N}^n\}$ é um espaço de Fréchet com estas seminormas. $\varphi(x)=e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A inclusão $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é contínua. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1\leq p\leq\infty$ e as inclusões são contínuas.

2. A topologia de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Dado $K\subset\subset\Omega$, $\mathcal{C}_c^\infty(K)=\{f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \mathtt{supp}\,f\subset K\}$ é subespaço fechado de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Munido da topologia relativa, $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ é portanto um espaço de Fréchet e, se $K_1\subset K_2$, a inclusão $\mathcal{C}_c^\infty(K_1)\hookrightarrow\mathcal{C}_c^\infty(K_2)$ é contínua. Mune-se então $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)=\bigcup_{K\subset\subset\Omega}\mathcal{C}_c^\infty(K)$ da topologia do *limite indutivo de espaços localmente convexos*, construção devida aos franceses L. Schwartz, J. Dieudonné e A. Grothendick. Um subconjunto $A\subset\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é um aberto desta topologia se, e somente se, A é a união de conjuntos do tipo $\varphi+W$, sendo $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e $W\subseteq\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ convexo, equilibrado, e tal que, para todo $K\subset\subset\Omega$, $W\cap\mathcal{C}_c^\infty(K)$ é um aberto de $\mathcal{C}_c^\infty(K)$. Resulta que esta é a topologia mais fina que se pode definir em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ de forma a torná-lo um espaço localmente convexo e a tornar contínuas todas as inclusões $\mathcal{C}_c^\infty(K)\hookrightarrow\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (ver Teorema V.15 de [4]). Além do mais, as topologias relativas induzidas em $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ por $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e por $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ coincidem, para todo $K\subset\subset\Omega$ (Teorema 6.5 de [5]).

Tudo que vamos usar sobre a topologia de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entretanto, resume-se aos (ou decorre dos) resultados seguintes.

Teorema 1: (Teorema V.17 de [4], ou Teorema 6.5 de [5]) Se uma sequência converge a zero em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $u_j \to 0$, então existe $K \subset\subset \Omega$ contendo o suporte de todas u_j's.

Teorema 2: (Teorema V.16 de [4], ou Teorema 6.6 de [5]) Uma aplicação linear T entre $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e um espaço localmente convexo Y é contínua se, e somente se, as restrições $T|_{\mathcal{C}_c^\infty(K)} : \mathcal{C}_c^\infty(K) \to Y$ são contínuas, para todo $K \subset\subset \Omega$.

Serão de particular interesse para nós os casos $Y = \mathbb{C}$, $Y = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ou $Y = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

É importante observar aqui que, como $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ é um espaço métrico e como a adição é contínua, o Teorema 2 implica que uma $T : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to Y$ linear é contínua se, e somente se, $Tu_j \to 0$ para toda sequência $u_j \to 0$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. E o Teorema 1 implica que uma sequência u_j converge a zero em $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ se, e somente se, u_j e suas derivadas convergem uniformemente a zero e existe um $K \subset\subset \Omega$ contendo os suportes de todas u_j's. Se se adotam estes corolários dos Teoremas 1 e 2 como *definições*, os resultados de topologia geral discutidos acima tornam-se prescindíveis. Esta é a abordagem da teoria das distribuições adotada por [1] ou por [2], por exemplo (uma *distribuição* é um funcional linear contínuo $T : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$).

References

[1] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 1983.

[2] Jorge Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 1979.

[3] Gert Pedersen, *Analysis Now*, 1988.

[4] Michael Reed & Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*, 1980.

[5] Walter Rudin, *Functional Analysis*, 1973.