MAT 0226 - Equações Diferenciais I

Prova Substitutiva - 11 de dezembro de 2008

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1: (2 pts) Determine o domínio maximal da solução do PVI $\begin{cases} y' = (y^2-1)^2(y^2+1)^{10} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Questão 2: (3 pts) (a) Dadas p e q funções contínuas em um intervalo I, defina

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y, \;\; y \in C^2(I).$$

Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas soluções linearmente independentes de $Ly = 0$. Dada $f \in C(I)$, sejam α_1 e α_2 tais que $\phi_1\alpha_1' + \phi_2\alpha_2' = 0$ e $\phi_1'\alpha_1' + \phi_2'\alpha_2' = f$. Mostre que $L(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = f$.

(b) Ache a solução do PVI $\begin{cases} (1-x)y'' + xy' - y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, $f \in C((-\infty, 1))$.

Dica: A exponencial é solução da homogênea.

Questão 3: (2 pts) (a) Defina precisamente o que significa uma solução constante de um sistema autônomo ser instável.

(b) Mostre que, se A é uma matriz quadrada possuindo ao menos um autovalor com parte real positiva, então $y \equiv 0$ é uma solução instável do sistema $y' = Ay$ (y em $\mathbb{R}^n$).

Questão 4: (3 pts) (a) Seja $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, onde α e β são reais. Calcule explicitamente cada entrada de $\exp(At)$, verificando que são, todas elas, reais.

(b) No caso em que α e β são positivos, esboce o plano de fase do sistema $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = -\beta x + \alpha y \end{cases}$.