MAT 0226 - Equações Diferenciais I

2^a Prova - 4 de novembro de 2008

Questão 1: (1,5 pt) Mostre que toda solução de $x^2y'' - xy' + y = 1$ tende a 1 quando x tende a 0.

Questão 2: (2 pts) (a) Dê a solução geral das equações

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad \text{e} \quad y'''' + 2y'' + y = 0.$$

(b) Sem efetuar os cálculos, indique como obter, usando o método dos coeficientes a determinar, uma solução particular das equações

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x + e^{-x} \quad \text{e} \quad y'''' + 2y'' + y = e^{-x}\cos x + \cos x.$$

Questão 3: (2 pts) Considere o operador linear

$$\begin{aligned} L : \{y \in C^2([0,2\pi]);\, y(0) = y(2\pi),\, y'(0) = y'(2\pi)\} &\longrightarrow C([0,2\pi]) \\ y &\longmapsto y'' + y \end{aligned}$$

(a) Mostre que o núcleo de L tem dimensão dois.

(b) Mostre que $f \in C([0,2\pi])$ pertence à imagem de L se e somente se

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, x\, dx = 0.$$

Questão 4: (2,5 pts) Mostre que toda órbita limitada, definida em um intervalo maximal, de um sistema linear 2-por-2 é periódica.

Dicas: Separe em casos. Vale usar figuras de planos de fase em seu argumento.

Questão 5: (4 pts) (a) Dado $k > 0$, seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ solução de $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{x^2}$ tal que $\phi(t) > 0$ e $\phi'(t) < 0$ para todo $t \in I$. Mostre que $\phi'(\phi^{-1}(x))^2 = \dfrac{2k}{x} + C$ para algum C real.

(b) Seja ϕ a solução de $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{x^2} \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1 \end{cases}$.

Mostre que ϕ' é decrescente para $t \geq 0$ e que ϕ tende a zero em tempo finito.

(c) Mostre que o sistema $\dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\dfrac{k\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ ($|\cdot|$ denota a norma euclideana), possui ao menos uma solução cujo intervalo maximal é da forma (ω_-, ω_+), com $\omega_+ \in \mathbb{R}$. Dica: procure uma solução da forma $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$.

(d) Será que o sistema do item anterior possui alguma solução com intervalo maximal igual a $\mathbb{R}$? Dica: Pode invocar as leis de Kepler. Se o fizer, justifique porque o mesmo argumento não implicaria que toda solução tem intervalo maximal igual a $\mathbb{R}$.