TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

IME-USP - MAT 0226 - 2° SEMESTRE DE 2008

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e limitada. Seja $B > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq B,\ \forall (x,y) \in \Omega$. Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tome $a > 0$ tal que

$$R := \{(x,y);\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq aB\} \subset \Omega \tag{1}$$

(um tal a existe pois Ω é aberto). Daí, defina

$$M = \{y \in C([x_0 - a, x_0 + a]);\ |y(x) - y_0| \leq B|x - x_0|\}.$$

O gráfico de uma $y \in M$ está contido no subconjunto de R delimitado pelas retas de coeficientes angulares B e $-B$ que passam por (x_0, y_0). Dada $y \in M$, defina

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

($f(t, y(t))$ está definido pois o gráfico de y está contido em R e $R \subset \Omega$). Temos:

$$|F(y)(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(t)\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y(t)|\, dt \right| \leq B|x - x_0|.$$

Daí, $F(y) \in M$.

Proposição 1. *Se $\phi \in M$ satisfaz $F(\phi) = \phi$, então ϕ é solução do problema de valor inicial*[1]

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Reciprocamente, se ϕ é uma solução deste problema de valor inicial definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$, então $\phi \in M$ e $F(\phi) = \phi$.

Demonstração: Se $F(\phi) = \phi$, então

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt, \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a]. \tag{3}$$

É óbvio, então, que $\phi(x_0) = y_0$. E segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Reciprocamente, se $\phi : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ é solução de (2), integrando $\phi'(t) = f(x, \phi(t))$ de x_0 a x, obtemos:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt$$

e, daí,

$$|\phi(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t))|\, dt \right| \leq B|x - x_0|.$$

Ou seja, $\phi \in M$ e $F(\phi) = \phi$. □

[1] Mais precisamente: o gráfico de ϕ está contido em Ω, ϕ é derivável em $[x_0 - a, x_0 + a]$ (com derivadas laterais nos extremos), $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ e $\phi(x_0) = y_0$.

Proposição 2. *Munido da métrica* $d(y,z) = \max\{|y(x)-z(x)|; x \in [x_0-a, x_0+a]\}$, M *é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Sabemos que $C([x_0-a, x_0+a])$ com a métrica d é um espaço métrico completo. Basta, portanto, mostrar que, se $y_n \in M$ e $y_n \to y$ em $C([x_0-a, x_0+a])$, então $y \in M$.

Se $y_n \to y$ em $C([x_0-a, x_0+a])$, então, para todo $x \in [x_0-a, x_0+a]$, $|y_n(x) - y(x)| \leq d(y_n, y) \to 0$, logo $|y_n(x) - y_0| \to |y(x) - y_0|$. Segue então de $|y_n(x) - y_0| \leq B|x - x_0|$ que $|y(x) - y_0| \leq B|x - x_0|$ para todo $x \in [x_0-a, x_0+a]$. Isto prova que $y \in M$. □

Vimos que, se M é um espaço métrico completo e se $F : M \to M$ é tal que, para algum inteiro positivo k, $F^{(k)} := F \circ F \circ \cdots \circ F$ (k vezes) é uma contração, então F tem um único ponto fixo. Logo para provar a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial (2), basta provar que $F^{(k)}$ é uma contração para algum k. Isto se consegue fazer impondo mais condições sobre f.

Definição 1. Diz-se que uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é *lipschtziana na segunda variável* se $\exists\ \beta > 0$ tal que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \beta|y_1 - y_2|,\ \forall (x,y_1),\ (x,y_2) \in \Omega$. Diz-se então que β é uma *constante de Lipschtz* para f.

Teorema 1. *Dados* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *aberto e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua e limitada, seja* $B > 0$ *tal que* $|f(x,y)| \leq B,\ \forall (x,y) \in \Omega$. *Suponha, ademais, que* f *é lipschtziana na segunda variável. Dado* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *escolha* $a > 0$ *tal que valha* (1). *Então existe uma única solução do problema de valor inicial* (2) *definida em* $[x_0-a, x_0+a]$.

Demonstração: Seja β uma constante de Lipschitz para f. Dados y_1 e y_2 em M, para todo $x \in [x_0-a, x_0+a]$, temos:

$$|F(y_2)(x) - F(y_1)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))]\, dt \right| \leq$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))|\, dt \right| \leq \beta \left| \int_{x_0}^{x} |y_2(t)) - y_1(t)|\, dt \right| \leq$$

$$\beta d(y_1, y_2) \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \beta d(y_1, y_2)|x - x_0|.$$

Daí vem:

$$|F^{(2)}(y_2)(x) - F^{(2)}(y_1)(x)| \leq \beta \left| \int_{x_0}^{x} |F(y_2)(t) - F(y_1)(t)|\, dt \right| \leq$$

$$\beta^2 d(y_1, y_2) \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| = \beta^2 d(y_1, y_2)| \frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Procedendo por indução (o leitor deve verificar os detalhes), é possível mostrar que, para todo inteiro positivo k, tem-se:

$$|F^{(k)}(y_2)(x) - F^{(k)}(y_1)(x)| \leq \beta^k\, d(y_1, y_2)\, \frac{|x - x_0|^k}{k!},$$

logo

$$|F^{(k)}(y_2)(x) - F^{(k)}(y_1)(x)| \ \leq\ d(y_1, y_2)\, \frac{(a\beta)^k}{k!}, \quad \forall x \in [x_0-a, x_0+a],$$

logo

$$d(F^{(k)}(y_2), F^{(k)}(y_1)) \ \leq\ d(y_1, y_2)\, \frac{(a\beta)^k}{k!}.$$

Como a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\beta)^k}{k!}$ converge (pelo critério da razão), é possível escolher $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(a\beta)^{k_0}/k_0! < 1$. Para este k_0, $F^{(k_0)}$ é uma contração. $\square$

O teorema que acabamos de provar é "local" (o a pode ser muito pequeno) mas com hipóteses "globais" (as desigualdades envolvendo as constantes B e β valem em todo o aberto). É natural, portanto, que seja possível relaxar as hipóteses, substituindo-as por condições locais. Fazendo isto, perderemos apenas um pouco de informação sobre o tamanho do a.

Definição 2. Diz-se que uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é *localmente lipschtziana na segunda variável* se, para todo retângulo fechado [2] $Q \subset \Omega$, existe $\beta > 0$ tal que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \beta|y_1 - y_2|$, $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in Q$.

O detalhe importante desta definição é que o β depende do Q.

Teorema 2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschtziana na segunda variável. Para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe $a > 0$ tal que existe uma única solução do problema de valor inicial* (2) *definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$.*

Demonstração: Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, seja Q um retângulo fechado contido em Ω e contendo (x_0, y_0) em seu interior. Seja B o máximo de $|f|$ em Q e seja β a constante associada a Q como na Definição 2. Aplicando o Teorema 1 com o interior de Q no lugar de Ω, segue que existe o a procurado. $\square$

Corolário 1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua tal que a derivada parcial na segunda variável $\partial f/\partial y$ existe e é contínua em Ω. Para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe $a > 0$ tal que existe uma única solução do problema de valor inicial* (2) *definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$.*

Demonstração: Segue do Teorema do Valor Médio que f é localmente lipschtziana na segunda variável. $\square$

Observação 1. Devido à maneira como a é dado no Teorema 1, se a' é tal que $0 < a' < a$, então a conclusão do Teorema 2 também vale com a' no lugar de a.

Proposição 3. *Seja f como no Teorema 2 e sejam $\phi : I \to \mathbb{R}$ e $\psi : J \to \mathbb{R}$ duas soluções de $y' = f(x, y)$, sendo I e J intervalos abertos. Se $\phi(b) = \psi(b)$ para algum $b \in I \cap J$, então $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I \cap J$.*

Demonstração: Definamos

$$L_1 = \{x \in I \cap J; \phi(x) = \psi(x)\} \quad \text{e} \quad L_2 = \{x \in I \cap J; \phi(x) \neq \psi(x)\}.$$

Como $\phi - \psi$ é contínua, L_2 é aberto (verifique). Dado $x_0 \in L_1$, seja $y_0 = \phi(x_0) = \psi(x_0)$, e seja a o número fornecido pelo Teorema 2. Diminuindo a se preciso (veja a Observação 1), podemos supor que $[x_0 - a, x_0 + a] \subset I \cap J$. Da unicidade do Teorema 2 decorre que ϕ e ψ coincidem em $(x_0 - a, x_0 + a)$. Logo, L_1 também é aberto.

Um intervalo aberto não pode ser expresso como uma união de dois abertos não-vazios disjuntos. Como L_1 não é vazio ($b \in L_1$), segue que $I \cap J = L_1$. $\square$

[2] Um *retângulo fechado* é um produto cartesiano de intervalos fechados e limitados.

Proposição 4. *Seja f como no Teorema 2 e seja I um intervalo fechado ou contendo apenas uma de suas extremidades. Se $\psi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de $y' = f(x, y)$, então existem um intervalo aberto $\tilde{I}$ contendo I e uma solução $\tilde{\psi} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ de $y' = f(x, y)$ cuja restrição a I é igual a ψ. Duas tais extensões coincidem na interseção de seus domínios.*

Demonstração: Suponhamos que I é da forma $[x_0, c)$ (para os demais casos, argumenta-se analogamente). Seja $y_0 = \psi(x_0)$. Aplicando o Teorema 2, obtemos $a > 0$ e $\phi : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ solução do problema de valor inicial (2). Definamos

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in (x_0 - a, c), \\ \psi(x), & x \in I. \end{cases}$$

Então $\tilde{\psi} : (x_0 - a, c) \to \mathbb{R}$ é uma solução de $y' = f(x, y)$ que estende ψ.

Duas tais extensões seriam iguais, pela Proposição 3. $\square$

Teorema 3. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como no Teorema 2 ou no Corolário 1. Para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni x_0$ e $\phi : I \to \mathbb{R}$ solução do problema de valor inicial* (2) *tais que, se $\psi : J \to \mathbb{R}$ é uma outra solução do problema de valor inicial* (2)*, definida num intervalo qualquer J, então $J \subseteq I$ e ψ é igual à restrição de ϕ a J.*

Demonstração: Seja $I = \bigcup_{\alpha \in A} \{I_\alpha;\ I_\alpha$ é intervalo aberto e existe $\phi_\alpha \to \mathbb{R}$ solução do pvi (2)$\}$. Se $x \in I_\alpha \cap I_\beta$, então, pela Proposição 3, $\phi_\alpha(x) = \phi_\beta(x)$. Isto nos permite definir $\phi : I \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = \phi_\alpha(x)$, se $x \in I_\alpha$. É imediato verificar que ϕ é solução do problema de valor inicial (2).

Dada uma outra solução $\psi : J \to \mathbb{R}$, use a Proposição 4 para obter solução $\tilde{\psi} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ que estende ψ definida em um intervalo aberto $\tilde{J}$ (tome $J = \tilde{J}$ e $\tilde{\psi} = \psi$ se J já for aberto). Então $\tilde{J} = I_\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Logo ψ é restrição da ϕ definida no parágrafo anterior. $\square$