MAT 0226, 2^o Semestre de 2008, 6^a Lista

1 - Dada $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, resolva $\left\{ \begin{array}{l} x^2y'' + 3xy' + y = f(x) \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{array} \right.$.

2 - Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana, mostre que toda solução de $x' = f(x)$ tem domínio maximal igual a $\mathbb{R}$.
Lembrete: f ser lipschitziana significa que existe $\beta > 0$ tal que, para todos x e y em $\mathbb{R}^n$, $||f(x) - f(y)|| \leq \beta||x - y||$ (para $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $||x|| = |x_1| + \cdots + |x_n|$).
Sugestão: Para cada $a > 0$, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que $F : C([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n) \to C([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$, $[F(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, ds$, tem um único ponto fixo.

3 - Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua. Mostre que, se ϕ é uma solução de $x' = f(x)$ tal que $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = a \in \Omega$, então $f(a) = 0$.

4 - Mostre que, para todo $a \geq 0$, o sistema autônomo $\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = 8xy \end{array} \right.$ possui uma órbita ϕ tal que $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = (-a, 0)$. Daí conclua que, para todo $a \geq 0$, a equação diferencial $x'' - 8xx' = 0$ possui uma solução φ tal que $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = -a$

5 - Esboce o plano de fase de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, para:
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$;
(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6 - Estude o sistema $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x + y \\ y' & = & -\epsilon x - y \end{array} \right.$ e conclua que, se $-1 < \epsilon \leq 0$, então a origem é um nó estável e que, se $\epsilon > 0$, então a origem é uma espiral estável. O que acontece quando $\epsilon \leq -1$?